МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
Высшего образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет математики и компьютерных наук

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине

Теория случайных процессов

Кафедра прикладной математики
факультета математики и компьютерных наук

Образовательная программа бакалавриата

01.03.05-Статистика

Направленность (профиль) программы
Анализ больших данных

Форма обучения
Очная

Статусдисциплины: входит в профильную часть ОПОП, в модуль профильной направленности Б1.О.06.07.

Махачкала,2023

Фонд оценочных средств по дисциплине «Теория случайных процессов» составлен в 2023 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО бакалавриата по направлению подготовки 01.03.05 - Статистика от 14.08.2020 г. № 1032

Разработчик: кафедра прикладной математики,Ризаев М.К. к.ф.-м.н. доцент

Фонд оценочных средств по дисциплине «Теория случайных процессов » одобрен:

на заседании кафедры прикладной математики от « 20 » января2023 г., протокол № 5

Зав. кафедрой ______________ Кадиев Р.М.

на заседании Методической комиссии факультета математики и компьютерных наук от « 25 » января 2023г., протокол № 4.

Председатель ______________ Ризаев М.К.

Фонд оценочных средств по дисциплине «Теория случайных процессов » согласован с учебно-методическим управлением

«20» феврал 2023г.

Начальник УМУ ______________ Гасангаджиева А.Г.

Рецензент(эксперт):

доц. кафедры диф. мат. и инф. ДГУ ______________ Фамилия И.О.

(полное наименование организации и должности руководителя) *(подпись)* Гаджиев М.М.

М.П.

1.ПАСПОРТ
ФОНДАОЦЕНОЧНЫХСРЕДСТВ
ПОДИСЦИПЛИНЕ
«Теория случайных процессов»

1.1.ОСНОВНЫЕСВЕДЕНИЯОДИСЦИПЛИНЕ

Общаятрудоемкостьдисциплинысоставляет 2 зачетные единицы (72 академических часов).

Видработы	Трудоемкость, академическихчасов		
	6 семестр	___семестр	всего
Общаятрудоёмкость	72		72
Контактнаяработа:	48		48
Лекции(Л)	16		16
Практическиезанятия(ПЗ)	16		16
Лабораторные занятия (ЛЗ)	16		16
Консультации			
Промежуточнаяаттестация(зачет, экзамен)	зачет		
Самостоятельная работа 1. работа с лекционным материалом, с учебнойлитературой 2. опережающая самостоятельная работа (изучение новогоматериаладо егоизложения назанятиях) 3. выполнение домашних заданий, домашних контрольныхработ 4. подготовка к лабораторным работам, к практическим исеминарскимзанятиям 5. подготовкакконтрольнымработам,коллоквиумам,зачету	4 4 4 6 6		4 4 4 6 6

!.2Требования к результатам обучения по дисциплине, формы их контроля и виды оценочных средств.

№ п/п	Контролируемые модули, разделы(темы) дисциплины	Кодконтролируемойкомпетенции(илиеёчасти)	Оценочныесредства		Способ контроля
			наименование	№№заданий	
1	**Модуль 1.** Корреляционная	ОПК-3 УК-2	Вопросы для собеседования	1-9	устно

	теория случайных процессов. Стационарные случайные процессы.	ОПК-3 УК-2	Задачи для решения в аудитории и для самостоятельного решения.	1	письменно
		ОПК-3 УК-2	Лабораторные работы	1-2	письменно

2	**Модуль 2.** Марковские случайные процессы..	ОПК-3 УК-2	Вопросы для собеседования	10-19	устно
		ОПК-3 УК-2	Тестовые задания	1	письменно
		ОПК-3 УК-2	Лабораторные работы	3	письменно

1.3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения).

Код и наименование компетенции из ОПОП	**Код и наименование индикатора достижения компетенций** *(в соответствии с ОПОП)*	**Планируемые результаты обучения**	**Процедура освоения**
. УК-2. Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений	УК-2.1 Знает необходимые для осуществления профессиональной деятельности правовые нормы и ресурсы.	Знает: действующие правовые нормы в области научной и педагогической деятельности; имеющиеся ресурсы для разработки и реализации данного проекта. Умеет: решать качественно и в срок круг задач, определяемых данным проектом. Владеет: навыками решения конкретных задач с достижением поставленной цели в области научных исследований по математике и компьютерным наукам.	Контрольные работы, лабораторные работы, экзамен
	. УК-2.2. Умеет определять круг задач в рамках избранных видов профессиональной деятельности, планировать собственную	Знает: необходимые и (или) достаточные условия взаимосвязи вопросов и задач в различных областях математики; следственные связи между разными	

	деятельность исходя из имеющихся ресурсов; соотносить главное и второстепенное, решать поставленные задачи в рамках избранных видов профессиональной деятельности.	математическими утверждениями. Умеет: выделять в рамках поставленных в проекте целей круг взаимосвязанных задач, который исходя из имеющихся ресурсов позволит реализовать данный проект. Владеет: навыками выбора в рамках целей научных исследований круг взаимосвязанных математических задач, обеспечивающих достижение этих целей.	
	УК-2.3. Имеет практический опыт применения нормативной базы и решения задач в области избранных видов профессиональной деятельности.	Знает: действующие правовые нормы в области научной и педагогической деятельности. Умеет: планировать этапы реализации данного проекта в области математических исследований с выбором оптимального способа его реализации. Владеет: практическими навыками решения определенных задач в области научных исследований по прикладной математике и компьютерным наукам с применением нормативной базы.	
ОПК-3. Способен осознанно применять методы математической и дескриптивной статистики для анализа количественных данных, в том числе с применением необходимой вычислительной техники и стандартных компьютерных программ, содержательно интерпретировать полученные результаты, готовить статистические материалы для докладов, публикаций и других аналитических материалов	ОПК-3.1.Знает общую методику статистического исследования и способы количественной формализации объекта наблюдений	Знает: общую методику статистического исследования и способы количественной формализации объекта наблюдений. Умеет: применить общую методику статистического исследования и способы количественной формализации объекта наблюдений при решении профессиональных задач. Владеет: навыками применения общей методики статистического исследования и способы количественной формализации объекта наблюдений при решении прикладных задач.	Контрольные работы, лабораторные работы, экзамен
	ОПК-3.2. Умеет применять математический и эконометрический инструментарий для анализа количественных данных, в том числе сприменением информационных систем и технологий.	Знает: как применить математический и эконометрический инструментарий для анализа количественных данных, в том числе с применением информационных систем и технологий. Умеет:применять математический и эконометрический инструментарий для анализа	

		количественных данных, в том числе с применением информационных систем и технологий. Владеет:математическим и эконометрическим инструментарий для анализа количественных данных, в том числе с применением информационных систем и технологий вычислительной техникой.	
	ОПК-3.3. Владеет навыками выбора и применения инструментальных средств для обработки количественных данных, навыками интерпретации результатов и формулирования выводов и рекомендаций для подготовки аналитических материалов.	Знает: как применить математические и статистические инструментария и современную вычислительную технику для решения прикладных задач. Умеет: применить математические и статистические инструментария и современную вычислительную технику для решения прикладных задач. Владеет: навыками применения математического и статистического инструментария для решения прикладных задач, методами работы с современной вычислительной техникой.	

2. Контрольные задания и иные материалы

оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения дисциплины «Теория случайных процессов»

2.1.Задания для самостоятельной работы.

Модуль1. Корреляционная теория случайных процессов. Стационарные случайные процессы.

1. Случайный процесс $x(t)$ определен уравнением $x(t) = t\xi(\omega)$, $t \geq 0,$ где $\xi(\omega)$– случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[1; 2]$. Описать множество траекторий и сечений случайного процесса.

2. Пусть случайный процесс задан соотношением $x(t) = \frac{1}{1+t^2}\xi(\omega)$, где$\xi(\omega)$ - равномерно распределенная на $[0;1]$ случайная величина. Найти семейство одномерных распределений процесса.
3. Случайный процесс задан уравнением $x(t) = (t^2+1)\xi(\omega), t \in [0;1]$, где $\xi(\omega)$ - случайная величина, имеющая показательные распределение с параметром $\lambda = 5$. Найти семейство одномерных распределений процесса.
4. Случайный процесс задан уравнением $x(t) = \sin t \cdot \xi(\omega) + \cos t$, где$\xi(\omega)$ - случайная величина с характеристиками $M(\xi) = 5, D(\xi) = 0{,}1$. Найти математическое ожидание и ковариационную функцию процесса.
5. Случайный процесс $x(t)$ имеет вид
$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\omega)\sin(it)\,, t \geq 0,$$
где$\xi_i(\omega)$ - действительные некоррелированные случайные величины с известными параметрами $M(\xi_i) = M_i, D(\xi_i) = D_i$.Найти ковариационную функцию и математическое ожидание.
6. Задана двумерная плотность случайного процесса $x(t)$ в виде
$$f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi} exp\left\{-\frac{(x_1+a_1)^2 + (x_2+a_2)^2}{2}\right\}$$
Вычислить основные характеристики процесса $m_x(t), D_x(t)$ и $K_x(t_1, t_2)$.
7. Случайный процесс $x(t) = t + V_1(\omega)\cos t + V_2(\omega)\cos t$, где V_1 и V_2 – центрированные и некоррелированные случайные величины с $D(V_1) = 0.1$ и $D(V_2) = 0.2$. Определить осредненные характеристики производной процесса.
8. Ковариационная функция с.к. – дифференцируемого случайного процесса $x(t)$ имеет вид $K_x(t_1, t_2) = De^{-\alpha|t_1-t_2|}\cos\beta(t_2-t_1)\,, \alpha > 0, \beta > 0$. Определить дисперсию производной процесса.
9. Пусть случайный процесс $x(t)$, $t \geq 0$ имеет характеристически $m_x(t) = mt$,$K_x(t_1, t_2) = Dt_1t_2$, где $D > 0$. Вычислить характеристики процесса $y = s_0^t x(\tau)d\tau, t \geq 0$.
10. Пусть случайный процесс
$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)x_i(t)$$
где $x_i(t)$ – некоторые случайные процессы, $a_i(t)$ - неслучайные функции. Доказать, что
$$K_y(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i(t_1)a_i(t_2)K_{x_ix_j}(t_1, t_2).$$

11. Пусть$x(t)$ – стационарная в широком смысле дифференцируемая случайная функция. Показать, что ее производная$x'(t)$также стационарна в широком смысле.

12.Пусть $\xi(\omega)$ - случайная величина с плотностью распределения

$f(x) = \sin x,\ 0 \le x \le \pi/2$ и a, ν - постоянные. Будет ли случайный процесс $x(t) = a\sin(\nu t + \xi(\omega))$ стационарным?

13. Пусть$\xi(\omega)$ - случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0; 2\pi]$. Доказать, что случайный процесс

$x(t) = 5\sin(3t + \xi(\omega))$стационарный в широком смысле и эргодический по математическому ожиданию.

14. Пусть$x(t)$ - процесс Пуассона с параметром λ, а $u(t) = x(t) - \lambda t$.

Будет ли этот процесс $u(t)$ эргодичен относительно своего математического ожидания?

15. Ковариационная функция стационарной случайной функции $x(t)$ задана в виде $K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \alpha > 0, -\infty < \tau < +\infty$. Найти спектральную плотность$s(\lambda)$и эффективные характеристики $\Delta\tau$ и $\Delta\lambda$.

16. Определить ковариационную функцию, дисперсию и эффективную ширину спектра стационарного процесса, имеющего спектральную плотность

$s(\lambda) = \frac{3}{\pi(\lambda^2+9)}$.

17. Найти спектральную плотность, эффективную ширину спектра и средний интервал корреляциистационарного случайного процесса$x(t)$с ковариационной функцией

$$K(\tau) = De^{-\alpha^2 t^2}, \alpha > 0.$$

18. Пусть $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ - случайные величины, совместное распределении которых – гауссовское. Показать, что случайный процесс

$x(t) = \xi(\omega)\sin t + \eta(\omega)\cos t$является гауссовским.

Найти математическим ожиданием и ковариационную функцию$x(t)$.

19. Найти плотность одномерного распределения гауссовского случайного процесса$x(t) = \xi(\omega) + t, t \ge 0$,где $\xi(\omega)$ - случайная величина с гауссовским распределением $N(0; \sigma^2)$, $\sigma > 0$.

20. Найти плотность конечномерного распределения процесса броуновского движения.

Модуль 2. Марковские случайные процессы.

1. Рассмотрим последовательность бросаний симметричной игральной кости. Пусть случайная величина $X(\omega)$ есть число очков, выпавших на грани при $n-$м бросании, $n = 1,2,\dots\dots$ Введем последовательность случайных величин по правилу

$$\xi(n) = max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

Показать, что последовательность $\xi(n)$ – марковская, и определить для нее переходную вероятность.

2. Показать, что процесс броуновского движения-марковский, и найти его переходную вероятность .
3. Вероятности перехода в простой однородной цепи Маркова дается матрицей

$$P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$

а) Чему равно число состояний этой цепи? б) Найти вероятности перехода из состояния в состояние за два шага.

4. Имеется простая однородная цепь Маркова с матрицей перехода $P = \|P_{ij}\|$. Вычислить: а) вероятность состояния E_i на $n-$м шаге, если известны все последующие состояния системы; б) вероятность E_i на $n-$м шаге, если известны все предыдущие и последующие состояния.
5. Цепь Маркова управляется матрицей перехода

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эргодична ли цепь?

6. Вероятность перехода дается матрицей $P = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$

   а) Убедиться в эргодичности этой цепи.

   б) Найти предельные вероятности.

7. Цепь Маркова управляется матрицей перехода

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Классифицировать все состояния этой цепи. Будет ли цепь эргодична? Найти асимптотическое поведение$P_{ij}(n)$.

8. Вычислить вероятности состояний пуассоновского процесса, используя системы уравнений Колмогорова.

9. Показать, что интенсивности переходов однородного процесса не зависят от времени.

10. Предположим, что поток сбоев ЭВМ является простейшим с интенсивностью λ. Если ЭВМ дает сбой, то он немедленно обнаруживается и производится ремонт, который длится в течение случайного времениτ $t(\omega)$с распределением $E(\mu)$. Вычислить вероятность того, что в момент времени t ЭВМ находится в рабочем состоянии.

2.2.Темы и содержание самостоятельной работы.

Разделы и темы для самостоятельного изучения.	Виды и содержание самостоятельной работы.
Восьмой семестр	
Модуль 1. Корреляционная теория случайных процессов.	
1. Случайные функции, процессы. Конечномерные распределения.	1. Решение задач. 2.Доклад на тему : Конечномерные распределения. Теорема Колмогорова.
2. Моментные функции случайного процесса, их свойства.	1. Решение задач. 2. Доклад на тему : Приближенное рассмотрение случайного процесса моментными функциями.
Стационарные случайные функции.	
1. Стационарные случайные процессы. Эргодичность процесса.	1. Решение задач. 2. Реферат на тему: Стационарный режим случайного процесса. 3. Доклад на тему: Эргодичность процесса и его физическое прикладное содержание.
3. Гауссовские случайные процессы.	1. Решение задач. 2. Реферат на тему : Функции брауновского движения. 3. Доклад на тему: Винеровский случайный процесс.
Модуль 2. Марковские случайные процессы.	
1. Марковские процессы . Цепи Маркова.	1. Решение задач. 2. Доклад на тему: Ориентированный граф состояний, классификация состояний.
2. Однородные цепи Маркова. Эргодичность цепи.	1. Решение задач. 2. Доклад на тему : Эргодичность динамических систем, коэффициент эргодичности.
3. Стохастические дифференциальные уравнения Ито.	1. Решение задач. 2. Реферат на тему: Формула Ито.

2.3. Примерные контрольные вопросы к коллоквиумам.

Примерные контрольные вопросы к коллоквиуму по разделу "Корреляционная теория случайных процессов".

1. Что называется вероятностной моделью?
2. Как определяется сечение случайного процесса?
3. Что называется случайным полем?
4. Можно ли рассматривать случайный процесс как совокупность сечений?
5. Что такое n - мерная функция распределения случайного процесса?
6. Что такое траектория случайного процесса?
7. Напишите условия согласованности конечномерных распределений случайного процесса.

8. Если хотя бы одна из переменных $x_i \to -\infty$, то к чему стремится функция распределения $F(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$ случайного процесса?
9. Какие случайные процессы называются стохастически эквивалентными?
10. Приведите определения основных моментных функций случайного процесса.
11. Каким образом выражается дисперсия через ковариационную функцию?
12. Как определяется ковариационная функция связи двух случайных процессов?
13. Дайте определение векторного случайного процесса.
14. Приведите определение производной случайного процесса.
15. Приведите определение интеграла от случайной функции.
16. Напишите формулу связи ковариационных функций случайного процесса и его производной.
17. Приведите понятие линейного преобразования случайного процесса.
18. Пусть L_0- линейный однородный оператор и $y(t) = L_0X(t)$. Напишите формулу связи ковариационных функций $K_x(t_1, t_2)$ и $K_y(t_1, t_2)$.
19. Пусть$y(t) = a(t)x(t) + b(t)$, где $x(t)$ - случайный процесс, а $a(t)$ и $b(t)$ - неслучайные функции. Каким образом связаны дисперсии процессов $x(t)$ и $y(t)$.
20. Пусть L_0- линейный однородный оператор и случайные процессы $x(t)$ и $y(t)$ связаны формулой $y(t) = L_0\{x(t)\}$. Показать, что $m_y(t) = L_0\{m_x(t)\}$.

Примерные контрольные вопросы к коллоквиуму по разделу "Стационарные случайные процессы. Гауссовы процессы"

1. В каком случае случайный процесс называется стационарным в широком смысле?
2. Дайте определение стационарности в строгом смысле случайного процесса.
3. Приведите определение взаимной стационарности в широком смысле двух случайных процессов.
4. Справедливо ли утверждение "Стационарный в широком смысле случайный процесс стационарен и в строгом смысле"?
5. Верно ли предложение "Стационарный в строгом смысле случайный процесс стационарен и в широком смысле"?
6. Является ли производная стационарного в широком смысле и дифференцируемого процесса стационарным в широком смысле процессом?
7. Какой случайный процесс называется эргодическим по математическому ожиданию?
8. Сформулируйте критерий эргодичности случайного процесса по математическому ожиданию.
9. Приведите определение эргодичности случайного процесса по ковариационной функции.
10. Дайте определение эргодичности процесса по его дисперсии.
11. Какой случайный процесс называется случайным процессом с ортогональными приращениями?

12. Сформулируйте предложение о спектральном представлении стационарного случайного процесса.
13. Сформулируйте теорему Хинчина, приведите формулу спектрального представления ковариационной функции.
14. Приведите понятия спектральной функции, спектральной плотности случайного процесса.
15. Напишите формулы для эффективной ширины спектра и эффективной длительности корреляции случайного процесса.
16. Дайте определение гауссовского-мерного случайного вектора.
17. В каком случае процесс называется гауссовским.
18. Приведите выражение для характеристической функции -мерного вектора сечений гауссовского процесса.
19. Является ли линейное преобразование гауссовских систем гауссовским?
20. Справедливо ли утверждение "Производная дифференцируемого гауссовского процесса является гауссовским"?

Примерные контрольные вопросы к коллоквиуму по разделу "Марковские случайные процессы".

1. Какой случайный процесс называется марковским?
2. Приведите уравнение Колмогорова - Чепмена для переходной вероятности марковского процесса.
3. Дайте определение однородного марковского процесса.
4. Каково уравнение Колмогорова - Чепмена для однородного марковского процесса?
5. Какая функция называется переходной плотностью распределения марковского случайного процесса?
6. Приведите определение цепи Маркова.
7. Что такое переходная вероятность цепи Маркова?
8. В каком случае цепь Маркова называется однородной?
9. Какая матрица называется матрицей переходных вероятностей цепи Маркова?
10. Напишите формулу связи $P(n)$ и $P(1)$ однородной цепи Маркова.
11. В каком случае состояние цепи Маркова называется возвратным?
12. Какие состояния цепи Маркова называются невозвратными?
13. Сформулируйте критерий возвратности состояния однородной цепи Маркова.
14. Приведите определение предельных вероятностей цепи Маркова.
15. Сформулируйте теорему Маркова об эргодичности однородной цепи Маркова с конечным числом состояний.
16. Что такое интенсивность, плотность перехода из одного состояния в другое цепи Маркова с непрерывным временем?
17. Приведите систему дифференциальных уравнений Колмогорова для марковского процесса.
18. Какой вид имеет система дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний?

19. Какой режим динамики цепи Маркова с непрерывным аргументом называется стационарным?
20. Приведите систему однородных алгебраических уравнений для вероятностей состояний при стационарном режиме цепи Маркова с непрерывным временем.

2.4.Примерные тестовые задания для проведения текущего контроля

Правильный ответ	Формулировка тестового задания
2)	Пусть случайный процесс $x(t) = t\xi(\omega)$, где $\xi(\omega)$ − случайная величина, равномерно распределённая на [0;2]. Тогда математическое ожидание сечения $x(2)$равно: 1) 5; 2) 2; 3)4; 4)1.
1)	Случайный процесс $x(t) = (t^2 + 1)\xi(\omega)$, где $\xi(\omega)$ – некоторая случайная величина с положительными значениями. Тогда верно утверждение 1) траектории процесса есть параболы, лежащие в верхней полуплоскости. 2) реализации есть прямые. 3) траектории есть параболы, ветви которых направленны вниз. 4) реализации есть окружности с центром в начале координат
2)	Случайный процесс задан уравнением $x(t) = \xi(\omega)\sin t + \cos t$, где $\xi(\omega)$-случайная величина с $M(\xi) = 3$ и $D(\xi) = 0{,}2$. Математическое ожидание процесса равно: 1) $3\sin t$; 2) $3\sin t + \cos t$; 3) $3\cos t$; 4) $0{,}2\sin t$.
3)	Выберите верное утверждение: 1) траектория случайного процесса есть случайная величина. 2) сечение случайного процесса есть неслучайная функция. 3) двумерная функция распределения случайного процесса принимает значения на отрезке [0;2].
2)	Дисперсия $D(t)$ и ковариационная функция $K(t_1;t_2)$ случайного процесса связанны равенством 1) $D(t) = K(t, 2t)$; 2) $D(t) = K(t, t)$. 3)$D(t) = K(2t, t)$; 4) $D(t) = K(2t, 2t)$
1)	Дисперсия$D(t)$и ковариационная функция $K(t_1;t_2)$ случайного процесса удовлетворяют неравенству: 1) $\lvert K(t_1;t_2)\rvert \leq \sqrt{D(t_1)D(t_2)}$. 2) $\lvert K(t_1;t_2)\rvert > 2D(t_1)D(t_2)$. 3) $\lvert K(t_1;t_2)\rvert > D(t_1) + D(t_2)$
2)	Пусть случайный процесс $x(t)$ дифференцируем в среднеквадратичном и $z(t) = x'(t)$. Если $m_x(t) = \sin 2t$, то $m_z(t)$ равно: 1) $\cos 2t$; 2) $2\cos 2t$; 3) $\sin 4t$; 4)$\cos 4t$.
1)	Пусть случайный процесс $x(t)$ интегрируем в среднеквадратичном на [0;1] и $$y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau.$$ Если $m_x(t) = \cos\frac{t}{2}$, то $m_y(t)$ равно: 1) $2\sin\frac{t}{2}$; 2) $-2\sin\frac{t}{2}$; 3) $-2\sin\frac{t}{2}$; 4) $\cos^2\frac{t}{2}$; 5) $\sin^2\frac{t}{2}$.
1)	Случайный процесс $x(t)$ стационарен в широком смысле. Выберите верное утверждение: 1) дисперсия процесса постоянна. 2) математическое ожидание постоянно, а дисперсия переменна. 3) математическое ожидание и дисперсия переменны.
2)	Ковариационная функция стационарного процесса имеет вид $K(\tau) = 4e^{-\lvert\tau\rvert}$, тогда

	дисперсия процесса равна: 1) $4e^{\tau}$; 2) 4; 3) $4e^{2\tau}$; 4)$e^{-2\tau}$.
3)	Случайный процесс $x(t)$ эргодичен в среднем квадратичном по математическому ожиданию, если: 1) этот процесс дифференцируем и интегрируем в среднем квадратичном. 2) существует среднее значение по аргументу на любом конечном промежутке [0;T]. 3) его среднее значение по аргументу $< x >_0^T$ сходится при$T \to \infty$ в среднем квадратичном к значению математического ожидания $m_x(t)$.
2)	Необходимым и достаточным условием эргодичности в среднем квадратичном по математическому ожиданию случайного процесса второго порядка является существование предела: 1) $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T K_x(t,t)dt = 0$. 2) $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\int_0^T K_x(t_1,t_2)dt_1dt_2 = 0$. 3) $\lim_{t\to\infty} K_x(t,t)dt = 0$. 4) $\lim_{\substack{t_1\to\infty \\ t_2\to\infty}} K_x(t,t)dt = 0$.
3)	Выберите верное утверждение: 1) если случайный процесс стационарен, то он и эргодичен по математическому ожиданию; 2) всякий эргодичный случайный процесс по математическому ожиданию стационарен; 3) если случайный процесс стационарен и $\lim_{\tau\to\infty} K_x(\tau) = 0$, то он эргодичен по математическому ожиданию.
1)	Выберите верное утверждение: 1) если случайный процесс x(t) стационарен и $\lim_{\tau\to\infty} K_x(\tau) = 0$, то он эргодичен по дисперсии; 2) для того чтобы стационарный процесс x(t) был эргодичен по дисперсии, необходимо и достаточно выполнение равенства $\lim_{\tau\to\infty} K_x(\tau) = 0$; 3) если случайный процесс x(t) стационарен и $\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau} K_x(\tau) = 0$, то он эргодичен по математическому ожиданию.
4)	Стационарный случайный процесс x(t) эргодичен по ковариационной функции, если он: 1) непрерывен в среднем квадратичном на любом конечном промежутке [0,T]; 2) ковариационная функция зависит лишь от разности аргументов; 3) ковариационная функция четна; 4) ковариационная функция удовлетворяет условию $\lim_{\tau\to\infty} K_x(\tau) = 0$;
2)	Случайный процесс x(t) задан спектральным разложением$x(t) = m_x(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu t}dz(\nu)$.Случайный процесс z(γ) является: 1) процессом с отличным от нуля математическим ожиданием. 2) процессом с ортогональными приращениями. 3) центрированным процессом с коррелированными приращениями.
3)	Ковариационная функция K(τ) стационарного случайного процесса x(t) в виде $K(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu\tau}dS(\nu)$. Тогда функция S(γ) должна быть: 1) монотонно убывающей, неотрицательной, ограниченной снизу; 2) отрицательной, монотонно неубывающей, ограниченной сверху; 3) неотрицательной монотонно неубывающей, ограниченной сверху, непрерывной слева.
1)	Если s(γ) есть спектральная плотность случайного процесса, и$K_x(\tau)$ – его ковариационная функция, то имеет место формула: 1) $K(\tau) = \int_{-\infty}^{\gamma} e^{i\gamma\tau}s(\gamma)d\gamma$; 2)$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\gamma} e^{-i\gamma\tau}s(\gamma)d\gamma$; 3) $K(\tau) = \int_0^{\gamma} e^{i\gamma\tau}s(\gamma)d\gamma$; 4)$K(\tau) = \int_0^{\gamma} e^{-i\gamma\tau}s(\gamma)d\gamma$;

2)	Случайный процесс x(t) стационарен, s(γ) – спектральная плотность, K(τ) – ковариационная функция. Тогда справедливо соотношение: 1) $s(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\gamma\tau}K(\tau)d\tau$; 2) $s(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\gamma\tau}K(\tau)d\tau$; 3) $s(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{i\gamma\tau}K(\tau)d\tau$; 4) $s(\gamma) = \int_{0}^{+\infty} e^{-i\gamma\tau}K(\tau)d\tau$;
3)	Пусть случайный процесс вещественен, s(γ) есть спектральная плотность спектрального представления ковариационной функции K(τ). Тогда справедлива формула: 1) $s(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} K(\tau)cos\gamma\tau d\tau$; 2) $s(\gamma) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} K(\tau)sin\gamma\tau d\tau$; 3) $s(\gamma) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} K(\tau)cos\gamma\tau d\tau$; 4) $s(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} K(\tau)sin\gamma\tau d\tau$;
4)	Ковариационная функция вещественного стационарного процесса задана спектральным представлением $K(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\gamma\tau}s(\gamma)d\gamma$. Тогда имеет место уравнение: 1) $K(\tau) = \int_{0}^{+\infty} s(\gamma)cos\gamma\tau d\gamma$; 2) $K(\tau) = \int_{0}^{+\infty} s(\gamma)cos\gamma\tau d\tau$; 3) $K(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} s(\gamma)cos\gamma\tau d\gamma$; 4) $K(\tau) = 2\int_{0}^{+\infty} s(\gamma)cos\gamma\tau d\tau$;
3)	Действительный случайный процесс $x(t),\ t\epsilon T$ называется гауссовским, если его характеристическая функция $\varphi(\vec{z};\vec{t}), z_i\epsilon R^1, t_i\epsilon\ T, i = 1,2,..n$ имеет вид: 1) $\varphi(\vec{z};\vec{t}) = exp\{i(\vec{m},\vec{z}\}$, где$m_i = M\{x(t_i)\}$; 2)$\varphi(\vec{z};\vec{t})exp\{-(R\vec{z},\vec{z})\}$, где R матрица ковариаций сечений$x(t_i)$; 3) $\varphi(\vec{z};\vec{t}) = exp\left\{i(\vec{m},\vec{z}) - \frac{1}{2}(R\vec{z},\vec{z})\right\}$; 4) $\varphi(\vec{z};\vec{t}) = exp\{i(\vec{m},\vec{z}) - (R\vec{z},\vec{z})\}$;
1)	Гауссовский случайный процесс $x(t), t \geq 0$ с непрерывным временем называется стандартным винеровским процессом, если: 1) $x(0) = 0, m_x(t) = 0, coV\{x(t),x(s)\} = \min(t,s),\ t,s \geq 0$; 2) $m_x(t) = 0, coV\{x(t),x(s)\} = \max(t,s),\ t,s \geq 0$; 3) $x(0) = 0, m_x(t) > 0, coV\{x(t),x(s)\} = \min(t,s),\ t,s \geq 0$; 4) $m_x(t) > 0, coV\{x(t),x(s)\} = \max(t,s),\ t,s \geq 0$;
2)	Гауссовский случайный процесс $x(t), t \geq 0$ с непрерывным временем называется процессом броуновского движения, если: 1) $x(0) > 0, m_x(t) = 0, coV\{x(t),x(s)\} = \min(t,s),\ t,s \geq 0$; 2) $x(0) = 0, m_x(t) = 0, coV\{x(t),x(s)\} = \min(t,s),\ t,s \geq 0$; 3) $m_x(t) > 0, coV\{x(t),x(s)\} = \max(t,s),\ t,s \geq 0$;
1)	Линейное преобразование гауссовских систем: 1) является гауссовской системой; 2) не гауссовская система; 3) необязательно гауссовская система;
1)	Переходная вероятность марковского процесса x(t) определяется по формуле: 1) $P(t_1,x_1,t_2,B) = P\{x(t_2)\epsilon B\|\ x(t_1) = x_1\}$; 2) $P(t_1,x_1,t_2,B) = P\{x(t_2) = x_1,\ x(t_2)\epsilon B\}$; 3) $P(t_1,x_1,t_2,B) = P\{x(t_1) = x_1\}\cdot P\{\ x(t_2)\epsilon B\}$; 4) $P(t_1,x_1,t_2,B) = P\{x(t_1) = x_1\|\ x(t_2)\epsilon B\}$.

2)	Переходная вероятность марковского процесса x(t) удовлетворяет уравнениию: 1) $P(t_1,x_1,t_2,B) = \int_{R^1} P(t_1,x_1,u,dy)P(t_1,x_1,u,y)$; 2) $P(t_1,x_1,t_2,B) = \int_{R^1} P(t_1,x_1,u,dy)P(u,y,t_2,B)$; 3) $P(t_1,x_1,t_2,B) = \int_{R^1} P(u,dy,t_2,B)P(t_1,x_1,u,y)$.
3)	Цепь Маркова управляется матрицей $P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$. Чему равна переходная вероятность $p_{22}(2)$? 1) 0.64; 2) 0.74; 3) 0.76; 4) 1.54.
1)	Цепь Маркова управляется матрицей $P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$. Финальные вероятности равны: 1) $p_1^* = \frac{6}{13}, p_2^* = \frac{7}{13}$; 2) $p_1^* = 1, p_2^* = 0$; 3) $p_1^* = 1, p_2^* = 0$; 4) $p_1^* = \frac{3}{4}, p_2^* = \frac{1}{4}$;
2)	Матрица переходных вероятностей цепи Маркова имеет вид $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти сумму вероятностей $P_{11}(3) + P_{11}(13) + P_{11}(20)$. 1) 4; 2) 3; 3) 6.5; 4) 7.

2.5. Варианты контрольных работ для текущего контроля.

<u>Контрольная работа №1.</u>

Вариант №1

1. Случайный процесс$x(t)$задается уравнением
   $x(t) = t^2 + \xi(\omega),\ t \geq 0,$ где $\xi(\omega)$-случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[-2; 2]$. Описать множество сечений и траекторий случайного процесса.
2. Найти осредненные характеристики случайного процесса
   $x(t) = \xi(\omega)\sin t + \cos t,$ где $\xi(\omega)$- случайная величина с характеристиками $M(\xi) = 3,\ \ D(\xi) = 0.2.$

Вариант №2

1. Найти одномерную функцию распределения случайного процесса
   $x(t) = \xi(\omega)t^2 + 5,\ t \geq 0$, где $\xi(\omega)$- нормально распределенная случайная величина с характеристиками
   $$M(\xi) = 0,\ \ D(\xi) = 1$$
2. Ковариационная функция стационарного случайного процесса $x(t)$ имеет вид $k(\tau) = 0.1e^{-|\tau|}, -\infty < \tau < \infty.$
   Найти спектральную плотность и эффективные характеристики $\Delta\gamma$ и $\Delta\tau$

Вариант №3

1. Случайный процесс$x(t)$задается уравнением

$x(t) = \sin t + \xi(\omega),\ t \geq 0,$ где $\xi(\omega)$-случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[-4; 4]$. Описать множество сечений и траекторий случайного процесса.

2. Случайный процесс$x(t)$задан формулой
   $x(t) = \sin t + \xi(\varpi)(t^2+1),\ t \geq 0,$ где $\xi(\varpi)$- случайная величина с характеристиками $M(\xi) = 10,\ D(\xi) = 0.1.$
   Найти ковариационную функцию процесса $y(t) = \int_0^t x(t)d\tau$

Вариант №4

1. Случайный процесс$x(t)$задан каноническим разложением
   $x(t) = t^3 + \xi(\varpi)\sin t + \zeta(\varpi)\cos t\,,\ t > 0$ причем
   $D(\xi) = 0.2,\ D(\zeta) = 0.3$ вычислить осредненные характеристики процесса$z(t) = x'(t)$.
2. Определить эффективную ширину спектра стационарного случайного процесса с спектральной плотностью
   $s(v) = \frac{10}{v^2+y}, -\infty < v < \infty$

<u>Контрольная работа №2.</u>

Вариант №1

1. Установить является ли стационарным случайный процесс
   $x(t) = 10\sin\bigl(3t + \xi(\varpi)\bigr),$ где $\xi(\varpi)$- случайная величина, равномерно распределена на отрезке $[0; 2\pi]$.
2. Матрица переходных вероятностей за один шаг цепи Маркова имеет вид

$$P(1) = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/4 & 3/8 & 3/8 \\ 1/5 & 2/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

   Найти финальные вероятности цепи Маркова.

Вариант 2.

1. Найти плотность одномерного распределения гауссовского случайного процесса
   $x(t) = \xi(\omega) + t, t > 0,\ \xi(\omega) -$ случайная величина с гауссовским распределением $N(0;\ \sigma^2)$.
2. Матрица переходных вероятностей однородной цепи Маркова имеет вид

$$P(1) = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Найти сумму вероятности $P_{11}(1) + P_{22}(2) + P_{33}(3)$.

Вариант 3.

1. Случайный процесс$N(t)$представляет собой простейший пуассоновский поток отказов радиотехнической системы с интенсивностью 0,002 отказа в час. Найти вероятность того, что за 100 часов наступит не менее 3 отказов.

2. Найти наиболее вероятное состояние в момент времени $t = 2$ цепи Маркова с начальным распределением $\vec{p}(0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ и матрицей переходных вероятностей

$$P(1) = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вариант 4.

1. Гауссовский случайный процесс имеет вид $x(t) = 3\xi(\omega) + t$, где $\xi(\omega) -$ гауссовы случайная величина с характеристиками $M(\xi) = 0$ и $D(\xi) = \sigma^2$. Найти матрицу ковариаций для моментов времени t_1 и t_2.
2. При каких значениях параметров β и σ матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 1/6 & 1/6 \\ \beta & 2\beta & 3\beta \\ \sigma & 3\sigma & \sigma \end{pmatrix}$$

Является матрицей переходных вероятностей однородной цепи Маркова с тремя состояниями?

2.6.Вопросы для контроля самостоятельной работы студентов.

1. Конечномерные распределения случайного процесса. Принципы согласования.
2. Стохастическая эквивалентность случайных процессов.
3. Осредненные характеристики случайного процесса.
4. Описание случайного процесса моментными характеристиками.
5. Преобразование случайных процессов динамическими системами.
6. Дифференцирование случайных процессов.
7. Интегрирование случайных процессов.
8. Линейные преобразования случайных процессов.
9. Стационарность случайных процессов.
10. Эргодичность случайных процессов.
11. Процессы с ортогональными приращениями.
12. Спектральное представление стационарных случайных процессов.
13. Спектральное представление ковариационной функции стационарного процесса
14. Эффективные характеристики случайного процесса
15. Гауссовские случайные системы
16. Винеровские случайные процессы
17. Линейные преобразования гауссовских систем
18. Марковские процессы. Уравнение Колмогорова-Чепмена.
19. Цепи Маркова. Переходные вероятности.
20. Ориентированный граф состояния цепи Маркова.
21. Классификация состояний. Возвратность состояний.
22. Эргодичность цепи Маркова.

23.Марковские цепи с непрерывным временем. Основные понятия.
24.Система дифференциальных уравнений для переходных вероятностей.
25.Система дифференциальных уравнений для вероятностных состояний.

2.7. Критерии оценивания

- оценки "отлично" заслуживает студент, обнаруживший всестороннее, систематическое и глубокое знание учебно-программного материала, умение свободно выполнять задания, предусмотренные программой, усвоивший основную литературу и знакомый с дополнительной литературой, рекомендованной программой. Как правило, оценка "отлично" выставляется студентам, усвоившим взаимосвязь основных понятий дисциплины в их значении для приобретаемой профессии, проявившим творческие способности в понимании, изложении и использовании учебно-программного материала.

- оценки "хорошо" заслуживает студент, обнаруживший полное знание учебно-программного материала, успешно выполняющий предусмотренные в программе задания, усвоивший основную литературу, рекомендованную в программе. Как правило, оценка "хорошо" выставляется студентам, показавшим систематический характер знаний по дисциплине и способным к их самостоятельному пополнению и обновлению в ходе дальнейшей учебной работы и профессиональной деятельности.

-оценки "удовлетворительно" заслуживает студент, обнаруживший знания основного учебно-программного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и предстоящей работы по специальности, справляющийся с выполнением заданий, предусмотренных программой, знакомый с основной литературой, рекомендованной программой. Как правило, оценка "удовлетворительно"
выставляется студентам, допустившим погрешности в ответе на экзамене и при выполнении экзаменационных заданий, но обладающим необходимыми знаниями для их устранения под руководством преподавателя.

-оценка "неудовлетворительно" выставляется студенту, обнаружившему пробелы в знаниях основного учебно-программного материала, допустившему принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой заданий. Как правило, оценка "неудовлетворительно" ставится студентам, которые не могут продолжить обучение или приступить к профессиональной деятельности по окончании вуза без дополнительных занятий по соответствующей дисциплине.
Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающая из текущего контроля -50%.
Текущий контроль по дисциплине включает:
─посещение занятий – 10 баллов,
─участие на практических занятиях – 10 баллов

–выполнение лабораторных заданий – 10 баллов,
–коллоквиум – 30 баллов,
–выполнение аудиторных контрольных работ – 40 баллов.
Промежуточный контроль по дисциплине включает:
–устный опрос(экзамен)- 100 баллов.

Рекомендуемые границы оценок:
«отлично» - не менее 86% правильных ответов,
«хорошо» - 66-85% правильных ответов,
«удовлетворительно» - 51-65% правильных ответов,
«неудовлетворительно» - менее 50% правильных ответов.