МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет математики и компьютерных наук

ФОНД
ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

Теория случайных процессов

Кафедра прикладной математики
факультета математики и компьютерных наук

Образовательная программа бакалавриата

01.03.02-Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) программы
Математическое моделирование и вычислительная математика

Форма обучения
Очная

Статус дисциплины: входит в обязательную часть ОПОП

Махачкала 2022

Фонд оценочных средств по дисциплине "Теория случайных процессов" составлена в 2022 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика (уровень бакалавриата) от 10.01.2018 г. № 9

Разработчик: кафедра прикладной математики, Кадиев Р.И. д.ф.-м.н. профессор

Фонд оценочных средств по дисциплине " Теория случайных процессов " одобрена на заседании кафедры прикладной математики от « 25» февраля 2022г., протокол №6 .

Зав. кафедрой ________________ Кадиев Р.М.

на заседании Методической комиссии факультета математики и компьютерных наук от « 24 » марта 2022 г., протокол № 4 .

Председатель ________________ Ризаев М.К.

Фонд оценочных средств по дисциплине " Теория случайных процессов' согласована с учебно-методическим управлением «31» марта 2022 г.

Начальник УМУ ________________________ Гасангаджиева А.Г.

(подпись)

1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по дисциплине "Теория случайных процессов"

1.1. Основные сведения о дисциплине

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетные единицы (144 академических часа).

Вид работы	Трудоемкость, академических часов	
	5 семестр	всего
Общая трудоёмкость	**144**	**144**
Контактная работа:	**56**	**56**
Лекции (Л)	16	16
Практические занятия (ПЗ)	24	24
Лабораторные занятия (ЛЗ)	16	16
Консультации		
Промежуточная аттестация (зачет, экзамен)		
Самостоятельная работа: *- подготовка к контрольной работе;* *- самоподготовка (проработка и повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий;* *- подготовка к практическим занятиям;* *- подготовка к коллоквиумам;* *- подготовка к рубежному контролю)*	*52*	*52*
Вид итогового контроля (зачет, экзамен, дифференцированный зачет)	**экзамен**	**36**

1.2. Требования к результатам обучения по дисциплине, формы их контроля и виды оценочных средств

№ п/п	Контролируемые модули, разделы, (темы) дисциплины, их наименование	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства	Способ контроля
1	**Случайные функции, процессы. Конечномерные распределения.**	УК-1, ОПК-1, ПК-1	Доклад Лабораторная работы	Устно Защита лабораторной работы
2	**Моментные функции случайного процесса, их свойства.**	УК-1, ОПК-1, ПК-1	Устный опрос Лабораторная работы	Устно Защита лабораторной работы
3	**Стационарные случайные процессы. Эргодичность процесса.**	УК-1, ОПК-1, ПК-1	Доклад Лабораторная работы	Устно Защита лабораторной работы
4	**Гаусовские случайные процессы.**	УК-1, ОПК-1, ПК-1	Устный опрос Лабораторная работы	Устно Защита лабораторной работы
5	**Марковские процессы. Цепи Маркова.**	УК-1, ОПК-1, ПК-1	Доклад Лабораторная работы	Устно Защита лабораторной работы

6	Однородные цепи Маркова. Эргодичность цепей.	УК-1, ОПК-1, ПК-1	Тест Лабораторная работы	Тестирование Защита лабораторной работы
7	Стохастические дифференциальные уравнения Ито	УК-1, ОПК-1, ПК-1	Доклад Лабораторная работы	Устно Защита лабораторной работы

1.3. Показатели и критерии определения уровня сформированности компетенций

№ п/п	Код компетенции	Уровни сформированности компетенции			
		Недостаточный	Удовлетворительный (достаточный)	Базовый	Повышенный
1	УК-1	Отсутствие признаков удовлетворительного уровня	**Наличие признаков удовлетворительных знаний.** **Знает:** структуру задач в различных областях. **Умеет:** анализировать постановку данной математической задачи. **Владеет:** навыками сбора, отбора и обобщения научной информации в различных областях математики.	**Наличие признаков хороших знаний.** **Знает:** принципы математического моделирования разнородных явлений. **Умеет:** системно подходить к решению задач на разнородные явления в области математики и компьютерных наук. **Владеет:** навыками систематизации разнородных явлений.	**Наличие признаков отличных знаний.** **Знает:** современные методы сбора и анализа научного материала. **Умеет:** применять современные методы и средства анализа и систематизации научных данных. **Владеет:** навыками и пользования информационных технологий в организации и проведении научного исследования.
2	ОПК-1	Отсутствие признаков удовлетворительного уровня	**Наличие признаков удовлетворительных знаний.** **Знает:** теоретические основы базовых математических дисциплин, а также теоретической механики, физики. **Умеет:** решать задачи, связанные с исследованием различных методов, полученных в области математических и физических наук. **Владеет:** базовыми методами по исследованию математических и	**Наличие признаков хороших знаний.** **Знает:** способы использования знаний в различных областях математики при решении конкретных задач в области математики и естественных наук. **Умеет:** применять различные методы по исследованию математических и естественнонаучных задач. **Владеет:** навыками применения	**Наличие признаков отличных знаний.** **Знает:** различные методы исследованию математических и естественнонаучных задач. **Умеет:** корректно выбрать методы решения конкретной задачи в области математики и естественных наук. **Владеет:** навыками выбора методов решения задач.

			естественнонаучных задач.	математических методов при решении конкретных задач в области математики и естественных наук.	
3	ПК-1	Отсутствие признаков удовлетворительного уровня	**Наличие признаков удовлетворительных знаний.** **Знает:** основы теории вероятностей и математической статистики, численные методы и современные языки программирования. **Умеет:** применять современные научные исследования для решения различных задач математических и естественных наук. **Владеет:** навыками программирования на современных языках и методами построения математических моделей.	**Наличие признаков хороших знаний.** **Знает:** методы построения математически моделей; **Умеет:** решать задачи, связанные с исследованием операций и численными методами. **Владеет:** методами построения математических моделей.	**Наличие признаков отличных знаний.** **Знает:** методы исследования прикладных задач; современные информационные техно- логии. **Умеет:** применять методы исследования прикладных задач; современных информационных технологий. **Владеет:** навыками построения математических моделей для решения задач прикладного характера.

2. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И ИНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ОЦЕНКИ знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения дисциплины "Теория случайных процессов"

Задания для самостоятельной работы.

Модуль1. Корреляционная теория случайных процессов.

1. Случайный процесс $x(t)$ определен уравнением $x(t) = t\xi(\omega)$, $t \geq 0$, *где* $\xi(\omega)$– случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[1; 2]$. Описать множество траекторий и сечений случайного процесса.
2. Пусть случайный процесс задан соотношением $x(t) = \frac{1}{1+t^2}\xi(\omega)$, где$\xi(\omega)$ - равномерно распределенная на $[0; 1]$ случайная величина. Найти семейство одномерных распределений процесса.
3. Случайный процесс задан уравнением $x(t) = (t^2 + 1)\xi(\omega), t \in [0; 1]$, где $\xi(\omega)$ - случайная величина, имеющая показательные распределение с параметром $\lambda = 5$. Найти семейство одномерных распределений процесса.
4. Случайный процесс задан уравнением $x(t) = \sin t \cdot \xi(\omega) + \cos t$, где$\xi(\omega)$ - случайная величина с характеристиками $M(\xi) = 5, D(\xi) = 0{,}1$. Найти математическое ожидание и ковариационную функцию процесса.
5. Случайный процесс $x(t)$ имеет вид

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\omega) \sin(it)\, , t \geq 0,$$

где$\xi_i(\omega)$ - действительные некоррелированные случайные величины с известными параметрами $M(\xi_i) = M_i, D(\xi_i) = D_i$.Найти ковариационную функцию и математическое ожидание.

6. Задана двумерная плотность случайного процесса $x(t)$ в виде

$$f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=\frac{1}{2\pi}exp\left\{-\frac{(x_1+a_1)^2+(x_2+a_2)^2}{2}\right\}$$

Вычислить основные характеристики процесса $m_x(t), D_x(t)$ *и* $K_x(t_1,t_2)$.
7. Случайный процесс $x(t)=t+V_1(\omega)\cos t+V_2(\omega)\cos t$, *где* V_1 *и* V_2 – центрированные и некоррелированные случайные величины с $D(V_1)=0.1$ *и* $D(V_2)=0.2$. Определить осредненные характеристики производной процесса.
8. Ковариационная функция с.к. – дифференцируемого случайного процесса $x(t)$ имеет вид $K_x(t_1,t_2)=De^{-\alpha|t_1-t_2|}\cos\beta(t_2-t_1), \alpha>0, \beta>0$. Определить дисперсию производной процесса.
9. Пусть случайный процесс $x(t), t\geq 0$ имеет характеристически $m_x(t)=mt, K_x(t_1,t_2)=Dt_1t_2$, где $D>0$. Вычислить характеристики процесса $y=s_0^t x(\tau)d\tau, t\geq 0$.
10. Пусть случайный процесс

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}a_i(t)x_i(t)$$

где $x_i(t)$ – некоторые случайные процессы, $a_i(t)$ - неслучайные функции. Доказать, что

$$K_y(t_1,t_2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i(t_1)a_i(t_2)K_{x_ix_j}(t_1,t_2).$$

Модуль 2. Стационарные случайные процессы.

1. Пусть$x(t)$ – стационарная в широком смысле дифференцируемая случайная функция. Показать, что ее производная$x'(t)$также стационарна в широком смысле.
2. Пусть $\xi(\omega)$ - случайная величина с плотностью распределения $f(x)=\sin x,\ 0\leq x\leq \pi/2$ и a, ν - постоянные. Будет ли случайный процесс $x(t)=a\sin(\nu t+\xi(\omega))$ стационарным?
3. Пусть$\xi(\omega)$ - случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0;2\pi]$. Доказать, что случайный процесс $x(t)=5\sin(3t+\xi(\omega))$стационарный в широком смысле и эргодический по математическому ожиданию.

4. Пусть$x(t)$ - процесс Пуассона с параметром λ, а $u(t)=x(t)-\lambda t$. Будет ли этот процесс $u(t)$ эргодичен относительно своего математического ожидания?
5. Ковариационная функция стационарной случайной функции $x(t)$ задана в виде $K_x(\tau)=\sigma^2e^{-\alpha|\tau|}, \alpha>0, -\infty<\tau<+\infty$. Найти спектральную плотность$s(\lambda)$и эффективные характеристики $\Delta\tau$ *и* $\Delta\lambda$.
6. Определить ковариационную функцию, дисперсию и эффективную ширину спектра стационарного процесса, имеющего спектральную плотность $s(\lambda)=\frac{3}{\pi(\lambda^2+9)}$.
7. Найти спектральную плотность, эффективную ширину спектра и средний интервал корреляциистационарного случайного процесса$x(t)$с ковариационной функцией

$$K(\tau)=De^{-\alpha^2t^2}, \alpha>0.$$

8. Пусть $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ - случайные величины, совместное распределении которых – гауссовское. Показать, что случайный процесс $x(t)=\xi(\omega)\sin t+\eta(\omega)\cos t$является гауссовским. Найти математическим ожиданием и ковариационную функцию$x(t)$.
9. Найти плотность одномерного распределения гауссовского случайного процесса$x(t)=\xi(\omega)+t, t\geq 0$,где $\xi(\omega)$ - случайная величина с гауссовским распределением $N(0;\sigma^2)$, $\sigma>0$.
10. Найти плотность конечномерного распределения процесса броуновского движения.

Модуль 3. Марковские случайные процессы.

1. Рассмотрим последовательность бросаний симметричной игральной кости. Пусть случайная величина $X(\omega)$ есть число очков, выпавших на грани при $n-м$ бросании, $n = 1,2, \dots \dots$ Введем последовательность случайных величин по правилу
$$\xi(n) = max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$
Показать, что последовательность $\xi(n)$ – марковская, и определить для нее переходную вероятность.
2. Показать, что процесс броуновского движения-марковский, и найти его переходную вероятность .
3. Вероятности перехода в простой однородной цепи Маркова дается матрицей
$$P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$
а) Чему равно число состояний этой цепи? б) Найти вероятности перехода из состояния в состояние за два шага.

4. Имеется простая однородная цепь Маркова с матрицей перехода $P = \|P_{ij}\|$. Вычислить: а) вероятность состояния E_i на $n-м$ шаге, если известны все последующие состояния системы; б) вероятность E_i на $n-м$ шаге, если известны все предыдущие и последующие состояния.
5. Цепь Маркова управляется матрицей перехода
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эргодична ли цепь?

6. Вероятность перехода дается матрицей $P = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$

а) Убедиться в эргодичности этой цепи.

б) Найти предельные вероятности.

7. Цепь Маркова управляется матрицей перехода
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Классифицировать все состояния этой цепи. Будет ли цепь эргодична? Найти асимптотическое поведение$P_{ij}(n)$.

8. Вычислить вероятности состояний пуассоновского процесса, используя системы уравнений Колмогорова.

9. Показать, что интенсивности переходов однородного процесса не зависят от времени.

10. Предположим, что поток сбоев ЭВМ является простейшим с интенсивностью λ. Если ЭВМ дает сбой, то он немедленно обнаруживается и производится ремонт, который длится в течение случайного времениτ $t(\omega)$с распределением $E(\mu)$. Вычислить вероятность того, что в момент времени t ЭВМ находится в рабочем состоянии.

Примерные контрольные вопросы к коллоквиумам.

Примерные контрольные вопросы к коллоквиуму по разделу "Корреляционная теория случайных процессов".

1. Что называется вероятностной моделью?
2. Как определяется сечение случайного процесса?
3. Что называется случайным полем?
4. Можно ли рассматривать случайный процесс как совокупность сечений?
5. Что такое n - мерная функция распределения случайного процесса?
6. Что такое траектория случайного процесса?
7. Напишите условия согласованности конечномерных распределений случайного процесса.

8. Если хотя бы одна из переменных $x_i \to -\infty$, то к чему стремится функция распределения $F(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$ случайного процесса?
9. Какие случайные процессы называются стохастически эквивалентными?
10. Приведите определения основных моментных функций случайного процесса.
11. Каким образом выражается дисперсия через ковариационную функцию?
12. Как определяется ковариационная функция связи двух случайных процессов?
13. Дайте определение векторного случайного процесса.
14. Приведите определение производной случайного процесса.
15. Приведите определение интеграла от случайной функции.
16. Напишите формулу связи ковариационных функций случайного процесса и его производной.
17. Приведите понятие линейного преобразования случайного процесса.
18. Пусть L_0- линейный однородный оператор и $y(t) = L_0 X(t)$. Напишите формулу связи ковариационных функций $K_x(t_1, t_2)$ и $K_y(t_1, t_2)$.
19. Пусть$y(t) = a(t)x(t) + b(t)$, где $x(t)$ - случайный процесс, а $a(t)$ и $b(t)$ - неслучайные функции. Каким образом связаны дисперсии процессов $x(t)$ и $y(t)$.
20. Пусть L_0- линейный однородный оператор и случайные процессы $x(t)$ и $y(t)$ связаны формулой $y(t) = L_0\{x(t)\}$. Показать, что $m_y(t) = L_0\{m_x(t)\}$.

Примерные контрольные вопросы к коллоквиуму по разделу "Стационарные случайные процессы. Гауссовы процессы"

1. В каком случае случайный процесс называется стационарным в широком смысле?
2. Дайте определение стационарности в строгом смысле случайного процесса.
3. Приведите определение взаимной стационарности в широком смысле двух случайных процессов.
4. Справедливо ли утверждение "Стационарный в широком смысле случайный процесс стационарен и в строгом смысле"?
5. Верно ли предложение "Стационарный в строгом смысле случайный процесс стационарен и в широком смысле"?
6. Является ли производная стационарного в широком смысле и дифференцируемого процесса стационарным в широком смысле процессом?
7. Какой случайный процесс называется эргодическим по математическому ожиданию?
8. Сформулируйте критерий эргодичности случайного процесса по математическому ожиданию.
9. Приведите определение эргодичности случайного процесса по ковариационной функции.
10. Дайте определение эргодичности процесса по его дисперсии.
11. Какой случайный процесс называется случайным процессом с ортогональными приращениями?
12. Сформулируйте предложение о спектральном представлении стационарного случайного процесса.
13. Сформулируйте теорему Хинчина, приведите формулу спектрального представления ковариационной функции.
14. Приведите понятия спектральной функции, спектральной плотности случайного процесса.
15. Напишите формулы для эффективной ширины спектра и эффективной длительности корреляции случайного процесса.
16. Дайте определение гауссовского-мерного случайного вектора.
17. В каком случае процесс называется гауссовским.
18. Приведите выражение для характеристической функции -мерного вектора сечений гауссовского процесса.
19. Является ли линейное преобразование гауссовских систем гауссовским?
20. Справедливо ли утверждение "Производная дифференцируемого гауссовского процесса является гауссовским"?

Примерные контрольные вопросы к коллоквиуму по разделу "Марковские случайные процессы".

1. Какой случайный процесс называется марковским?
2. Приведите уравнение Колмогорова - Чепмена для переходной вероятности марковского процесса.
3. Дайте определение однородного марковского процесса.
4. Каково уравнение Колмогорова - Чепмена для однородного марковского процесса?

5. Какая функция называется переходной плотностью распределения марковского случайного процесса?
6. Приведите определение цепи Маркова.
7. Что такое переходная вероятность цепи Маркова?
8. В каком случае цепь Маркова называется однородной?
9. Какая матрица называется матрицей переходных вероятностей цепи Маркова?
10. Напишите формулу связи $P(n)$ *и* $P(1)$ однородной цепи Маркова.
11. В каком случае состояние цепи Маркова называется возвратным?
12. Какие состояния цепи Маркова называются невозвратными?
13. Сформулируйте критерий возвратности состояния однородной цепи Маркова.
14. Приведите определение предельных вероятностей цепи Маркова.
15. Сформулируйте теорему Маркова об эргодичности однородной цепи Маркова с конечным числом состояний.
16. Что такое интенсивность, плотность перехода из одного состояния в другое цепи Маркова с непрерывным временем?
17. Приведите систему дифференциальных уравнений Колмогорова для марковского процесса.
18. Какой вид имеет система дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний?
19. Какой режим динамики цепи Маркова с непрерывным аргументом называется стационарным?
20. Приведите систему однородных алгебраических уравнений для вероятностей состояний при стационарном режиме цепи Маркова с непрерывным временем.

Критерии оценки:

- оценка «отлично» выставляется студенту, если изложение полученных знаний в устной форме полное, в системе, в соответствии с требованиями учебной программы; допускаются единичные несущественные ошибки, самостоятельно исправляемые учащимися;
- оценка «хорошо» выставляется студенту, если изложение полученных знаний в устной форме полное, в системе, в соответствии с требованиями учебной программы; допускаются, отдельные несущественные ошибки, исправляемые учащимися после указания преподавателя на них;
- оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если изложение полученных знаний неполное, однако это не препятствует усвоению последующего программного материала; допускаются отдельные существенные ошибки, исправляемые с помощью преподавателя;
- оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если изложение учебного материала неполное, бессистемное, что препятствует усвоению последующей учебной информации; существенные ошибки, не исправляемые даже с помощью преподавателя;

Примерные тестовые задания для проведения текущего контроля

Правильный ответ	Формулировка тестового задания
2)	Пусть случайный процесс $x(t) = t\xi(\omega),\ где\ \xi(\omega) - случайная\ величина, равномерно\ распределённая$ на [0;2]. Тогда математическое ожидание сечения $x(2)$равно: 1) 5; 2) 2; 3)4; 4)1.
1)	Случайный процесс $x(t) = (t^2 + 1)\xi(\omega)$, где $\xi(\omega)$ – некоторая случайная величина с положительными значениями. Тогда верно утверждение 1) траектории процесса есть параболы, лежащие в верхней полуплоскости. 2) реализации есть прямые. 3) траектории есть параболы, ветви которых направленны вниз. 4) реализации есть окружности с центром в начале координат
2)	Случайный процесс задан уравнением $x(t) = \xi(\omega)\sin t + \cos t$, где $\xi(\omega)$- случайная величина с $M(\xi) = 3$ и $D(\xi) = 0{,}2$. Математическое ожидание

	процесса равно: 1) $3\sin t$; 2) $3\sin t+\cos t$; 3) $3\cos t$; 4) $0{,}2\sin t$.
3)	Выберите верное утверждение: 1) траектория случайного процесса есть случайная величина. 2) сечение случайного процесса есть неслучайная функция. 3) двумерная функция распределения случайного процесса принимает значения на отрезке [0;2].
2)	Дисперсия $D(t)$ и ковариационная функция $K(t_1;t_2)$ случайного процесса связанны равенством 1) $D(t)=K(t,2t)$; 2) $D(t)=K(t,t)$. 3)$D(t)=K(2t,t)$; 4) $D(t)=K(2t,2t)$
1)	Дисперсия$D(t)$и ковариационная функция $K(t_1;t_2)$ случайного процесса удовлетворяют неравенству: 1) $\lvert K(t_1;t_2)\rvert\ \le\ \sqrt{D(t_1)D(t_2)}$. 2) $\lvert K(t_1;t_2)\rvert>2D(t_1)D(t_2)$. 3) $\lvert K(t_1;t_2)\rvert>D(t_1)+D(t_2)$
2)	Пусть случайный процесс $x(t)$ дифференцируем в среднеквадратичном и $z(t)=x'(t)$. Если $m_x(t)=\sin 2t$, то $m_z(t)$ равно: 1) $\cos 2t$; 2) $2\cos 2t$; 3) $\sin 4t$; 4)$\cos 4t$.
1)	Пусть случайный процесс $x(t)$ интегрируем в среднеквадратичном на [0;1] и $$y(t)=\int\limits_0^t x(\tau)d\tau.$$ Если $m_x(t)=\cos\frac{t}{2}$, то $m_y(t)$ равно: 1) $2\sin\frac{t}{2}$; 2) $-2\sin\frac{t}{2}$; 3) $-2\sin\frac{t}{2}$; 4) $\cos^2\frac{t}{2}$; 5) $\sin^2\frac{t}{2}$.
1)	Случайный процесс $x(t)$ стационарен в широком смысле. Выберите верное утверждение: 1) дисперсия процесса постоянна. 2) математическое ожидание постоянно, а дисперсия переменна. 3) математическое ожидание и дисперсия переменны.
2)	Ковариационная функция стационарного процесса имеет вид $K(\tau)=4e^{-\lvert\tau\rvert}$, тогда дисперсия процесса равна: 1) $4e^{\tau}$; 2) 4; 3) $4e^{2\tau}$; 4)$e^{-2\tau}$.
3)	Случайный процесс $x(t)$ эргодичен в среднем квадратичном по математическому ожиданию, если: 1) этот процесс дифференцируем и интегрируем в среднем квадратичном. 2) существует среднее значение по аргументу на любом конечном промежутке [0;T]. 3) его среднее значение по аргументу $<x>_0^T$ сходится при$T\to\infty$ в среднем квадратичном к значению математического ожидания $m_x(t)$.
2)	Необходимым и достаточным условием эргодичности в среднем квадратичном по математическому ожиданию случайного процесса второго порядка является существование предела: 1) $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T K_x(t,t)dt=0$. 2) $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\int_0^T K_x(t_1,t_2)dt_1dt_2=0$. 3) $\lim_{t\to\infty}K_x(t,t)dt=0$. 4) $\lim_{\substack{t_1\to\infty\\ t_2\to\infty}}K_x(t,t)dt=0$.
3)	Выберите верное утверждение: 1) если случайный процесс стационарен, то он и эргодичен по

	математическому ожиданию; 2) всякий эргодичный случайный процесс по математическому ожиданию стационарен; 3) если случайный процесс стационарен и $\lim_{\tau\to\infty} K_x(\tau) = 0$, то он эргодичен по математическому ожиданию.
1)	Выберите верное утверждение: 1) если случайный процесс x(t) стационарен и $\lim_{\tau\to\infty} K_x(\tau) = 0$, то он эргодичен по дисперсии; 2) для того чтобы стационарный процесс x(t) был эргодичен по дисперсии, необходимо и достаточно выполнение равенства $\lim_{\tau\to\infty} K_x(\tau) = 0$; 3) если случайный процесс x(t) стационарен и $\lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} K_x(\tau) = 0$, то он эргодичен по математическому ожиданию.
4)	Стационарный случайный процесс x(t) эргодичен по ковариационной функции, если он: 1) непрерывен в среднем квадратичном на любом конечном промежутке [0,T]; 2) ковариационная функция зависит лишь от разности аргументов; 3) ковариационная функция четна; 4) ковариационная функция удовлетворяет условию $\lim_{\tau\to\infty} K_x(\tau) = 0$;
2)	Случайный процесс x(t) задан спектральным разложением$x(t) = m_x(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu t} dz(\nu)$.Случайный процесс z($_\gamma$) является: 1) процессом с отличным от нуля математическим ожиданием. 2) процессом с ортогональными приращениями. 3) центрированным процессом с коррелированными приращениями.
3)	Ковариационная функция K(τ) стационарного случайного процесса x(t) в виде $K(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu\tau} dS(\nu)$. Тогда функция S(γ) должна быть: 1) монотонно убывающей, неотрицательной, ограниченной снизу; 2) отрицательной, монотонно неубывающей, ограниченной сверху; 3) неотрицательной монотонно неубывающей, ограниченной сверху, непрерывной слева.
1)	Если s(γ) есть спектральная плотность случайного процесса, и$K_x(\tau)$ – его ковариационная функция, то имеет место формула: 1) $K(\tau) = \int_{-\infty}^{\gamma} e^{i\gamma\tau} s(\gamma) d\gamma$; 2)$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\gamma} e^{-i\gamma\tau} s(\gamma) d\gamma$; 3) $K(\tau) = \int_{0}^{\gamma} e^{i\gamma\tau} s(\gamma) d\gamma$; 4)$K(\tau) = \int_{0}^{\gamma} e^{-i\gamma\tau} s(\gamma) d\gamma$;
2)	Случайный процесс x(t) стационарен, s(γ) – спектральная плотность, K(τ) – ковариационная функция. Тогда справедливо соотношение: 1) $s(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\gamma\tau} K(\tau) d\tau$; 2) $s(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\gamma\tau} K(\tau) d\tau$; 3) $s(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} e^{i\gamma\tau} K(\tau) d\tau$; 4) $s(\gamma) = \int_{0}^{+\infty} e^{-i\gamma\tau} K(\tau) d\tau$;
3)	Пусть случайный процесс вещественен, s(γ) есть спектральная плотность спектрального представления ковариационной функции K(τ). Тогда справедлива формула: 1) $s(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} K(\tau) cos\gamma\tau d\tau$; 2) $s(\gamma) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} K(\tau) sin\gamma\tau d\tau$;

	3) $s(\gamma)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}K(\tau)cos\gamma\tau d\tau$; 4) $s(\gamma)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}K(\tau)sin\gamma\tau d\tau$;
4)	Ковариационная функция вещественного стационарного процесса задана спектральным представлением $K(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\gamma\tau}s(\gamma)d\gamma$. Тогда имеет место уравнение: 1) $K(\tau)=\int_0^{+\infty}s(\gamma)cos\gamma\tau d\gamma$; 2) $K(\tau)=\int_0^{+\infty}s(\gamma)cos\gamma\tau d\tau$; 3) $K(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}s(\gamma)cos\gamma\tau d\gamma$; 4) $K(\tau)=2\int_0^{+\infty}s(\gamma)cos\gamma\tau d\tau$;
3)	Действительный случайный процесс $x(t),\ t\epsilon T$ называется гауссовским, если его характеристическая функция $\varphi(\vec{z};\vec{t}), z_i\epsilon R^1, t_i\epsilon\ T, i=1,2,..n$ имеет вид: 1) $\varphi(\vec{z};\vec{t})=exp\{i(\vec{m},\vec{z}\}, где m_i=M\{x(t_i)\}$; 2)$\varphi(\vec{z};\vec{t})exp\{-(R\vec{z},\vec{z})\}, где\ R\ матрица\ ковариаций\ сечений x(t_i)$; 3) $\varphi(\vec{z};\vec{t})=exp\left\{i(\vec{m},\vec{z})-\frac{1}{2}(R\vec{z},\vec{z})\right\}$; 4) $\varphi(\vec{z};\vec{t})=exp\{i(\vec{m},\vec{z})-(R\vec{z},\vec{z})\}$;
1)	Гауссовский случайный процесс $x(t), t\geq 0$ с непрерывным временем называется стандартным винеровским процессом, если: 1) $x(0)=0, m_x(t)=0, coV\{x(t),x(s)\}=\min(t,s),\ t,s\geq 0$; 2) $m_x(t)=0, coV\{x(t),x(s)\}=\max(t,s),\ t,s\geq 0$; 3) $x(0)=0, m_x(t)>0, coV\{x(t),x(s)\}=\min(t,s),\ t,s\geq 0$; 4) $m_x(t)>0, coV\{x(t),x(s)\}=\max(t,s),\ t,s\geq 0$;
2)	Гауссовский случайный процесс $x(t), t\geq 0$ с непрерывным временем называется процессом броуновского движения, если: 1) $x(0)>0, m_x(t)=0, coV\{x(t),x(s)\}=\min(t,s),\ t,s\geq 0$; 2) $x(0)=0, m_x(t)=0, coV\{x(t),x(s)\}=\min(t,s),\ t,s\geq 0$; 3) $m_x(t)>0, coV\{x(t),x(s)\}=\max(t,s),\ t,s\geq 0$;
1)	Линейное преобразование гауссовских систем: 1) является гауссовской системой; 2) не гауссовская система; 3) необязательно гауссовская система;
1)	Переходная вероятность марковского процесса x(t) определяется по формуле: 1) $P(t_1,x_1,t_2,B)=P\{x(t_2)\epsilon B\|\ x(t_1)=x_1\}$; 2) $P(t_1,x_1,t_2,B)=P\{x(t_2)=x_1,\ x(t_2)\epsilon B\}$; 3) $P(t_1,x_1,t_2,B)=P\{x(t_1)=x_1\}\cdot P\{\ x(t_2)\epsilon B\}$; 4) $P(t_1,x_1,t_2,B)=P\{x(t_1)=x_1\|\ x(t_2)\epsilon B\}$.
2)	Переходная вероятность марковского процесса x(t) удовлетворяет уравнениию: 1) $P(t_1,x_1,t_2,B)=\int_{R^1}P(t_1,x_1,u,dy)P(t_1,x_1,u,y)$; 2) $P(t_1,x_1,t_2,B)=\int_{R^1}P(t_1,x_1,u,dy)P(u,y,t_2,B)$; 3) $P(t_1,x_1,t_2,B)=\int_{R^1}P(u,dy,t_2,B)P(t_1,x_1,u,y)$.
3)	Цепь Маркова управляется матрицей $P=\begin{pmatrix}0.1 & 0.9\\0.8 & 0.2\end{pmatrix}$. Чему равна переходная вероятность $p_{22}(2)$? 1) 0.64; 2) 0.74; 3) 0.76; 4) 1.54.
1)	Цепь Маркова управляется матрицей $P=\begin{pmatrix}0.3 & 0.7\\0.6 & 0.4\end{pmatrix}$. Финальные вероятности равны: 1) $p_1^*=\frac{6}{13}, p_2^*=\frac{7}{13}$;

	2) $p_1^* = 1, p_2^* = 0$; 3) $p_1^* = 1, p_2^* = 0$; 4) $p_1^* = \frac{3}{4}, p_2^* = \frac{1}{4}$;
2)	Матрица переходных вероятностей цепи Маркова имеет вид $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти сумму вероятностей $P_{11}(3) + P_{11}(13) + P_{11}(20)$. 1) 4; 2) 3; 3) 6.5; 4) 7.

Критерии оценки:

- оценка «отлично» выставляется студенту, если верно и правильно выполнено 90%-100% заданий;
- оценка «хорошо» выставляется студенту, если верно и правильно выполнено 70%-80% заданий;
- оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если верно и правильно решено 50%-60% заданий, возможны некоторые исправления при решении;
- оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если верно выполнено менее 50% заданий;
-

Темы эссе (рефер

Варианты контрольных работ для текущего контроля.

Контрольная работа №1.

Вариант №1

1. Случайный процесс$x(t)$задается уравнением
   $x(t) = t^2 + \xi(\omega),\ t \geq 0$, где $\xi(\omega)$-случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[-2; 2]$. Описать множество сечений и траекторий случайного процесса.
2. Найти осредненные характеристики случайного процесса
   $x(t) = \xi(\omega)\sin t + \cos t$, где $\xi(\omega)$- случайная величина с характеристиками $M(\xi) = 3,\ D(\xi) = 0.2$.

Вариант №2

1. Найти одномерную функцию распределения случайного процесса
   $x(t) = \xi(\omega)t^2 + 5,\ t \geq 0$, где $\xi(\omega)$- нормально распределенная случайная величина с характеристиками
   $$M(\xi) = 0,\ D(\xi) = 1$$
2. Ковариационная функция стационарного случайного процесса $x(t)$ имеет вид $k(\tau) = 0.1e^{-|\tau|}, -\infty < \tau < \infty$.
   Найти спектральную плотность и эффективные характеристики $\Delta\gamma$ *и* $\Delta\tau$

Вариант №3

1. Случайный процесс$x(t)$задается уравнением

$x(t) = \sin t + \xi(\omega),\ t \geq 0$, где $\xi(\omega)$-случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[-4; 4]$. Описать множество сечений и траекторий случайного процесса.

2. Случайный процесс$x(t)$задан формулой
   $x(t) = \sin t + \xi(\varpi)(t^2 + 1),\ t \geq 0$, где $\xi(\varpi)$- случайная величина с характеристиками $M(\xi) = 10,\ D(\xi) = 0.1$.
   Найти ковариационную функцию процесса $y(t) = \int_0^t x(t)d\tau$

Вариант №4

1. Случайный процесс$x(t)$задан каноническим разложением
   $x(t) = t^3 + \xi(\varpi)\sin t + \zeta(\varpi)\cos t,\ t > 0$ причем

$D(\xi) = 0.2,\ \ D(\zeta) = 0.3$ вычислить осредненные характеристики процесса$z(t) = x'(t)$.

2. Определить эффективную ширину спектра стационарного случайного процесса с спектральной плотностью
   $s(v) = \frac{10}{v^2+y}, -\infty < v < \infty$

<u>Контрольная работа №2.</u>

Вариант №1

1. Установить является ли стационарным случайный процесс
   $x(t) = 10\sin(3t + \xi(\varpi))$, где $\xi(\varpi)$- случайная величина, равномерно распределена на отрезке $[0; 2\pi]$.
2. Матрица переходных вероятностей за один шаг цепи Маркова имеет вид

$$P(1) = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/4 & 3/8 & 3/8 \\ 1/5 & 2/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

   Найти финальные вероятности цепи Маркова.

Вариант 2.

1. Найти плотность одномерного распределения гауссовского случайного процесса
   $x(t) = \xi(\omega) + t, t > 0,\ \xi(\omega) -$ случайная величина с гауссовским распределением $N(0;\ \sigma^2)$.
2. Матрица переходных вероятностей однородной цепи Маркова имеет вид

$$P(1) = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Найти сумму вероятности $P_{11}(1) + P_{22}(2) + P_{33}(3)$.

Вариант 3.

1. Случайный процесс$N(t)$представляет собой простейший пуассоновский поток отказов радиотехнической системы с интенсивностью 0,002 отказа в час. Найти вероятность того, что за 100 часов наступит не менее 3 отказов.
2. Найти наиболее вероятное состояние в момент времени $t = 2$ цепи Маркова с начальным распределением $\vec{p}(0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ и матрицей переходных вероятностей

$$P(1) = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вариант 4.

1. Гауссовский случайный процесс имеет вид $x(t) = 3\xi(\omega) + t,$ *где* $\xi(\omega) -$ гауссовы случайная величина с характеристиками $M(\xi) = 0$ *и* $D(\xi) = \sigma^2$.
   Найти матрицу ковариаций для моментов времени t_1 *и* t_2.
2. При каких значениях параметров β *и* σ матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 1/6 & 1/6 \\ \beta & 2\beta & 3\beta \\ \sigma & 3\sigma & \sigma \end{pmatrix}$$

Является матрицей переходных вероятностей однородной цепи Маркова с тремя состояниями?

Критерии оценки:

- оценка «отлично» выставляется студенту, если верно и правильно выполнено 90%-100% заданий;
- оценка «хорошо» выставляется студенту, если верно и правильно выполнено 70%-80% заданий;
- оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если верно и правильно

решено 50%-60% заданий, возможны некоторые исправления при решении;
- оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если верно выполнено менее 50% заданий;

Вопросы для экзамена.

1. Конечномерные распределения случайного процесса. Принципы согласования.
2. Стохастическая эквивалентность случайных процессов.
3. Осредненные характеристики случайного процесса.
4. Описание случайного процесса моментными характеристиками.
5. Преобразование случайных процессов динамическими системами.
6. Дифференцирование случайных процессов.
7. Интегрирование случайных процессов.
8. Линейные преобразования случайных процессов.
9. Стационарность случайных процессов.
10. Эргодичность случайных процессов.
11. Процессы с ортогональными приращениями.
12. Спектральное представление стационарных случайных процессов.
13. Спектральное представление ковариационной функции стационарного процесса
14. Эффективные характеристики случайного процесса
15. Гауссовские случайные системы
16. Винеровские случайные процессы
17. Линейные преобразования гауссовских систем
18. Марковские процессы. Уравнение Колмогорова-Чепмена.
19. Цепи Маркова. Переходные вероятности.
20. Ориентированный граф состояния цепи Маркова.
21. Классификация состояний. Возвратность состояний.
22. Эргодичность цепи Маркова.
23. Марковские цепи с непрерывным временем. Основные понятия.
24. Система дифференциальных уравнений для переходных вероятностей.
25. Система дифференциальных уравнений для вероятностных состояний.

7.4. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Критерии оценивания:

Оценка *«отлично»* выставляется студенту, если он глубоко и прочно усвоил программный материал курса, исчерпывающие, последовательно, четко и логически стройно его излагает, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами и вопросами, причем не затрудняется с ответами при видоизменении заданий, правильно обосновывает принятые решения, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических задач, если выполнены все задания лабораторной работы, составлен отчет по работе

Оценка *«хорошо»* выставляется студенту, если он твердо знает материал курса, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос, правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, владеет необходимыми навыками и приемами их выполнения, если выполнены почти все задания, за исключением отдельных пунктов, лабораторной работы, составлен отчет по работе;

Оценка *«удовлетворительно»* выставляется студенту, если он имеет знания только основного материала, но не усвоил его деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, испытывает затруднения при выполнении практических задач, если выполнены больше половины заданий лабораторной работы, составлен отчет по работе;

Оценка *«неудовлетворительно»* выставляется студенту, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями решает практические задачи или не справляется с ними самостоятельно, если выполнены меньше половины заданий лабораторной работы и не составлен отчет по работе

Рекомендуемые границы оценок:
«отлично» - не менее 86% правильных ответов,
«хорошо» - 66-85% правильных ответов,
«удовлетворительно» - 51-65% правильных ответов,
«неудовлетворительно» - менее 50% правильных ответов.