МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет математики и компьютерных наук

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по дисциплине

Разностные схемы

Кафедра прикладной математики факультета
математики и компьютерных наук

Образовательная программа магистратуры
01.04.02 - Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) программы
Математическое моделирование и вычислительная математика

Форма обучения
Очная

Статус дисциплины: входит в обязательную часть ОПОП

Махачкала, 2022

Фонд оценочных средств по дисциплине «Разностные схемы» составлен в 2022 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.04.02 - Прикладная математика и информатика от 10 января 2018 г. № 13.

Разработчик:
1. кафедра прикладной математики Абдурагимов Г.Э., к.ф.-м. н., доцент;

Фонд оценочных средств по дисциплине «Разностные схемы» одобрен:
на заседании кафедры прикладной математики от 25 февраля 2022г., протокол № 6.
Зав. кафедрой ________________ Кадиев Р.И.

на заседании Методической комиссии факультета математики и компьютерных наук от 24 марта 2022г., протокол № 4.
Председатель ________________ Ризаев М.К.

Фонд оценочных средств по дисциплине «Разностные схемы» согласован с учебно-методическим управлением «31» марта 2022г.
________________ (подпись)

Рецензент

доцент кафедры дифференциальных
уравнений и функционального анализа ДГУ ________________ Рагимханов В.Р.

1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по дисциплине «Разностные схемы»

1.1. Основные сведения о дисциплине

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетные единицы (72 академических часа).

Вид работы	Трудоемкость, академических часов	
	2 семестр	всего
Общая трудоёмкость	**72**	**72**
Контактная работа:	**28**	**28**
Лекции (Л)	14	14
Практические занятия (ПЗ)		
Лабораторные занятия (ЛЗ)	14	14
Консультации		
Промежуточная аттестация (зачет, экзамен)	зачет	
Самостоятельная работа: - *подготовка к лабораторной работе;* - *самоподготовка (проработка и повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий;*	**44** *24* *20*	**44** *24* *20*

1.2. Требования к результатам обучения по дисциплине, формы их контроля и виды оценочных средств

№ п/п	Контролируемые модули, разделы, (темы) дисциплины, их наименование	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Оценочные средства		Способ контроля
			Наименование	№№ заданий	
1	Разностные уравнения и разностные схемы для ОДУ	ОПК-1, ПК-1	Лабораторная работа (см. приложение)	1	Защита отчета
2	Разностные схемы для УЧП	ОПК-1, ПК-1	Лабораторная работа (см. приложение)	2	Защита отчета
Промежуточная аттестация: зачет		ОПК-1, ПК-1	Лабораторная работа (см. приложение)		Защита отчета

1.3. В результате изучения дисциплины «Разностные схемы» обучающийся должен:
1.3.1. Знать:
- основные понятия теории разностных схем, методы их составления, исследование и применение на практике;
- методы исследования сходимости разностных схем.

1.3.2. Уметь:
- исследовать на сходимость разностные схемы.

1.3.3. Владеть:
- практическим умением анализировать полученные результаты и формировать выводы;
- навыками применения современного математического аппарата в исследовательской и прикладной деятельности.

1.4. Показатели и критерии определения уровня сформированности компетенций

№ п/п	Код компетенции	Уровни сформированности компетенции			
		Недостаточный	Удовлетворительный (достаточный)	Базовый	Повышенный
	ОПК-1	Отсутствие признаков удовлетворительного уровня	**Знать:** основы численных методов и дифференциальных уравнений **Уметь:** применять полученные знания при составлении разностных схем **Владеть:** практическими навыками составления разностных схем	**Знать:** основные методы составления разностных схем **Уметь:** применять полученные знания при решении прикладных задач **Владеть:** практическими навыками составления разностных схем	**Знать:** основные методы составления разностных схем **Уметь:** правильно выбирать соответствующие методы формирования разностных схем **Владеть:** практическими навыками составления разностных схем
	ПК-1	Отсутствие признаков удовлетворительного уровня	**Знать:** основные методы и способы сбора и обработки необходимых данных при составлении разностных схем **Уметь:** правильно формулировать выводы по результатам решения поставленных прикладных задач	**Знать:** основные методы составления разностных схем **Уметь:** применять разностные схемы к решению дифференциальных и разностных уравнений	**Знать:** основные методы составления разностных схем **Уметь:** применять разностные схемы к решению дифференциальных и разностных уравнений, возникающих в прикладных исследованиях

			Владеть: практическими навыками составления разностных схем	**Владеть:** практическими навыками составления разностных схем	**Владеть:** навыками современного математического аппарата и информационных технологий в исследовательской и прикладной деятельности

2. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И ИНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ОЦЕНКИ знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения дисциплины «Разностные схемы»

2.1 Вопросы к зачету.

По учебному плану дисциплины в течение 2 семестра предусмотрено выполнение 2 лабораторных работ, название и содержание которых приводится в соответствующей рабочей программе дисциплины. Кроме того, на профильной кафедре, в научной библиотеке и на сайте ДГУ имеется лабораторный практикум по каждому разделу настоящей дисциплины.

Критерии оценивания

− **оценка «зачтено»** выставляется студенту, который успешно защитил не менее 2/3 отчетов по лабораторным работам, прочно усвоил предусмотренный программный материал; правильно, аргументировано ответил на все вопросы, с приведением примеров;

− **оценка «не зачтено»** выставляется студенту, который не представил к защите 2/3 и более отчетов по лабораторным работам и не справляется с 50% вопросов и в ответах на другие вопросы допустил существенные ошибки. Не может ответить на дополнительные вопросы, предложенные преподавателем.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Разностные схемы

Магистратура 1 курс

Лабораторная работа № 1

Тема: Разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Цель: Научиться составлять, исследовать разностные схемы, аппроксимирующие обыкновенные дифференциальные уравнения и с их помощью находить на компьютере приближенные решения типичных задач для этих уравнений.

Задание.

Составить разностную схему, аппроксимирующую двухточечную краевую задачу своего варианта со вторым порядком.

1) Составленную разностную схему решить на компьютере, пользуясь методом прогонки, предварительно проверив устойчивость составленной разностной схемы. При этом шаг сетки h брать не более 0.005. Предварительно то же самое проделать для тестовой задачи.

2) По полученным в пункте 1) результатам для каждого данного значения p построить таблицу приближенных значений решения в точках $x_i = 0{,}1 \cdot i,\ i = \overline{0{,}10}$ и построить соответствующий график решения.

3) Описать поведение решения в зависимости от p.

В работе привести

а) описания метода прогонки;

б) алгоритмы вычислений по этим методам;

в) проверку устойчивости составленной разностной схемы;

г) для каждого значения p таблицу значений приближенного решения в точках $\boldsymbol{x_i = 0,1 \cdot i,\ i = \overline{0,10}}$ и соответствующий график решения;

д) вывод о зависимости решения от параметра p.

Варианты

1. $$\begin{cases} y'' + x^2 y' - p e^x y = \frac{px}{x^2+1}, & 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0, & p = 0, 0.1, \cdots, 1.0. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} y'' - (x+1)y' - (2-p)\frac{x+1}{x^2+1} y = (p-1)\sin x, & 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0, & p = 0, 0.1, \cdots, 1.0. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} y'' - (p+1)\frac{1}{1+|\sin x|} y' - e^x y = \frac{p\cos x}{x^2+1}, & 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0, & p = 0, 0.1, \cdots, 1.0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} y'' + \frac{\cos x}{1+x^2} y' - (p+1)e^x y = (1-p)e^x, & 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0, & p = 0, 0.1, \cdots, 1.0. \end{cases}$$

5. $\begin{cases} y'' + \frac{1}{1+px^2}y' - 4y = e^{px} - 1, & 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0, & p = 0, 0.1, \cdots, \ 1.0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} y'' - \frac{p\sin x}{1+sin^2 x}y' - e^x y = \cos px - 1, & 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0, & p = 0, 0.1, \cdots, \ 1.0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} y'' + \sqrt{1 + pe^x}y' - e^{x\sin x}y = \sin px, & 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0, & p = 0, 0.1, \cdots, \ 1.0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} y'' - \frac{pe^x}{1+sin^2 x}y' - e^x y = \frac{\sin(p-1)x}{2+\sin x}, & 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0, & p = 0, 0.1, \cdots, \ 1.0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} y'' - \frac{pe^{px}}{1+x^2}y' - \frac{\sin(p-1)x+2}{2+\sin x}y = p - 1, & 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0, & p = 0, 0.1, \cdots, \ 1.0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} y'' + \frac{p\sin x}{1+x^2}y' - \frac{x+2}{1+e^{-x}}y = 1 - \cos px, & 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0, & p = 0, 0.1, \cdots, \ 1.0. \end{cases}$

Разностные схемы

Магистратура 1 курс

Лабораторная работа № 2

Тема: Разностные схемы для дифференциальных уравнений с частными производными.

Цель: Научиться составлять, исследовать разностные схемы, аппроксимирующие дифференциальные уравнения с частными производными и с их помощью находить на компьютере приближенные решения типичных задач для этих уравнений.

Задание

Найти приближенно решение задачи Коши для уравнения колебания струны в прямоугольнике D при каждом значении параметра p. Для этого аппроксимировать данную задачу Коши со вторым порядком точности с помощью трехслойной разностной схемы. Выбрать шаги h и l по осям ox и oy так, чтобы выполнялось условие устойчивости разностной схемы.

К отчету по лабораторной работе приложить:

1. условие задачи;
2. разностная схема, аппроксимирующая данную задачу со вторым порядком точности;
3. алгоритм реализации на компьютере составленной разностной схемы;
4. программа реализации на компьютере составленной разностной схемы;
5. решение тестовой задачи Коши по составленной программе и точное решение этой задачи для сравнения;
6. решение исходной задачи Коши в прямоугольнике D при каждом значении параметра p;
7. график решения исходной задачи Коши при каком-то одном значении параметра p.

Варианты

Во всех вариантах параметр p принимает значения 0, 1, 2, 3, 4.

1. $\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} = 2p(y-x), \ \ (x,y) \in D, \\ u(x,0) = -2, \\ u_y(x,0) = x^2. \end{cases}$ D={0<x<1, 0<y<2}.

2. $\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} = 6(x-y), \ \ (x,y) \in D, \\ u(x,0) = px^3, \\ u_y(x,0) = -x. \end{cases}$ D={0<x<2, 0<y<1}.

3. $\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} = 2(2p + y^2 - x^2), \ \ (x,y) \in D, \\ u(x,0) = x^2, \\ u_y(x,0) = 0. \end{cases}$ D={0<x<2, 0<y<2}.

4. $\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} = 6(x+y), \ \ (x,y) \in D, \\ u(x,0) = px^3, \\ u_y(x,0) = px. \end{cases}$ D={1<x<2, 0<y<1}.

5. $\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} = 2(px^2 - y^2), \ \ (x,y) \in D, \\ u(x,0) = 2, \\ u_y(x,0) = x. \end{cases}$ D={1<x<2, 0<y<2}.

6. $\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} = -4x, \ \ (x,y) \in D, \\ u(x,0) = x^3 + p, \\ u_y(x,0) = 3x^2. \end{cases}$ D={0<x<2, 0<y<1}.

7. $\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} = 0, \ (x,y) \in D, \\ u(x,0) = x^2 + px, \\ u_y(x,0) = 1. \end{cases}$ D={0<x<1, 0<y<2}.

8. $\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} = 2(x+y), \ (x,y) \in D, \\ u(x,0) = x, \\ u_y(x,0) = p + x^2. \end{cases}$ D={0<x<2, 0<y<2}.

9. $\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} = 2p(y^2 - x^2), \ (x,y) \in D, \\ u(x,0) = x - 1, \\ u_y(x,0) = -1. \end{cases}$ D={0<x<1, 0<y<1}.

10. $\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} = 0, \ (x,y) \in D, \\ u(x,0) = px, \\ u_y(x,0) = p. \end{cases}$ D={0<x<2, 0<y<2}.

Справочный материал

Пусть в области D={a<x<b, c<y<d} требуется решить задачу Коши

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} = f(x,y), \ (x,y) \in D, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u_y(x,0) = \psi(x). \end{cases} \qquad (1)$$

Рассмотрим, как получить приближенное решение этой задачи в узлах сеточной области $\omega \in D$, где $\omega = \{x_m = a + mh, \ y_n = c + nl, \ m = 0,1,\cdots,M, \ n = 0,1,\cdots,N\}$, $h = \frac{b-a}{M}, \ l = \frac{d-c}{N}$. Причем M и N следует выбрать так, чтобы обеспечить условие устойчивости $\frac{l}{h} \leq q < 1$.

Запишем задачу Коши (1) в операторной форме

$$L(u) = F, \qquad (2)$$

где

$$L(u) = \begin{cases} u_{xx} - u_{yy}, \ (x,y) \in D, \\ u(x,0), \\ u_y(x,0). \end{cases}$$

$$F = \begin{cases} f(x,y), \quad (x,y) \in D, \\ \varphi(x), \\ \psi(x). \end{cases}$$

Трехслойная разностная схема, аппроксимирующая задачу Коши (2) со вторым порядком точности и сходящая с этим же порядком, имеет вид

$$L_h\big(u^{(h)}\big) = F_h, \qquad (3)$$

где

$$L_h\big(u^{(h)}\big) = \begin{cases} \dfrac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - \dfrac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{l^2}, \\ u_m^0, \\ u_m^1. \end{cases}$$

$$F_h = \begin{cases} f(x_m, y_n), \\ \varphi(x_m), \\ \varphi(x_m) + l\psi(x_m) + \dfrac{l^2}{2}\big(\Lambda_{xx}(u_m^0) - f(x_m, y_0)\big), \end{cases}$$

$$\Lambda_{xx}(u_m^n) = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}. \qquad (4)$$

Алгоритм получения приближенного решения задачи (1) в прямоугольнике D с помощью трехслойной разностной схемы (3) второго порядка точности

Предполагая, что M и N выбраны так, что шаги $h=\frac{b-a}{M}$ и $l=\frac{d-c}{N}$ удовлетворяют условию устойчивости $\frac{l}{h}\le q<1$, запишем разностную схему (3) в виде

1. $u_m^0=\varphi(x_m)$,
2. $u_m^1=\varphi(x_m)+l\psi(x_m)+\frac{l^2}{2}\left(\Lambda_{xx}(u_m^0)-f(x_m,y_0)\right)$,
3. $u_m^{n+1}=2u_m^n+l^2\Lambda_{xx}(u_m^n)-u_m^{n-1}-l^2f(x_m,y_n)$.

Шаг 0. Вычисляем $u_m^0=\varphi(x_m)$ для значений m от $-N$ до $M+N$.

Шаг 1. Вычисляем $u_m^1=\varphi(x_m)+l\psi(x_m)+\frac{l^2}{2}\left(\Lambda_{xx}(u_m^0)-f(x_m,y_0)\right)$ для значений m от $-N+1$ до $M+N-1$.

Шаг 2. Вычисляем $u_m^2=2u_m^1+l^2\Lambda_{xx}(u_m^1)-u_m^0-l^2f(x_m,y_1)$ для значений m от $-N+2$ до $M+N-2$.

………………………………………………………………………………………

Шаг n. Вычисляем $u_m^n=2u_m^{n-1}+l^2\Lambda_{xx}(u_m^{n-1})-u_m^{k-2}-l^2f(x_m,y_{n-1})$ для значений m от $-N+n$до $M+N-n$.

………………………………………………………………………………………

Шаг N. Вычисляем $u_m^N=2u_m^{N-1}+l^2\Lambda_{xx}(u_m^{N-1})-u_m^{N-2}-l^2f(x_m,y_{N-1})$ для значений m от $-N+N=0$ до $M+N-N=M$.

Выводим на печать u_m^n для значений m от 0 до M и для значений n от 0 до N.

После выполнения шагов 0 и 1 остальные шаги можно объединить в цикле по n:
Для $n=2$ до $n=N$
Для $m=-N+n$ до $M+N-n$ выполнить
$u_m^n=2u_m^{n-1}+l^2(\Lambda_{xx}(u_m^{n-1})-u_m^{n-2}-f(x_m,y_{n-1}))$.
Выражение $\Lambda_{xx}(u_m^n)$ определено формулой (4).

Фактически по приведенному алгоритму вычислено очень много значений u_m^n, среди которых нам нужны только значения $u_m^n\approx u(x_m\,,y_n)$ для значений m от 0 до M и для значений n от 0 до K.