МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет математики и компьютерных наук

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по дисциплине

Непрерывные и дискретные математические модели

Кафедра прикладной математики факультета математики и компьютерных наук

Образовательная программа магистратуры
01.04.02 - Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) программы
Математическое моделирование и вычислительная математика

Форма обучения
Очная

Статус дисциплины: входит в обязательную часть ОПОП

Махачкала, 2022

Фонд оценочных средств по дисциплине «Непрерывные и дискретные математические модели» составлен в 2022 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.04.02 - Прикладная математика и информатика от 10 января 2018 г. № 13.

Разработчик:
1. кафедра прикладной математики Абдурагимов Г.Э., к.ф.-м. н., доцент;

Фонд оценочных средств по дисциплине «дисциплине «Непрерывные и дискретные математические модели» одобрен:
на заседании кафедры прикладной математики от 25 февраля 2022г., протокол № 6.
Зав. кафедрой ______________ Кадиев Р.И.

на заседании Методической комиссии факультета математики и компьютерных наук от 24 марта 2022г., протокол № 4.
Председатель ______________ Ризаев М.К.

Фонд оценочных средств по дисциплине «Непрерывные и дискретные математические модели» согласован с учебно-методическим управлением «31» марта 2022г. ______________
(подпись)

Рецензент

доцент кафедры дифференциальных
уравнений и функционального анализа ДГУ ______________ Рагимханов В.Р.

1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ по дисциплине «Непрерывные и дискретные математические модели»

1.1. Основные сведения о дисциплине

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных единиц (180 академических часов).

Вид работы	Трудоемкость, академических часов		
	2 семестр	3 семестр	всего
Общая трудоёмкость	**72**	**108**	**180**
Контактная работа:	**28**	**40**	**68**
Лекции (Л)	14	14	28
Практические занятия (ПЗ)			
Лабораторные занятия (ЛЗ)	14	26	40
Консультации			
Промежуточная аттестация (зачет, экзамен)	зачет	экзамен	
Самостоятельная работа: *- подготовка к лабораторной работе;* *- самоподготовка (проработка и повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий;* *- письменный опрос* *- подготовка к экзамену*	**44** *24* *10* *10* -	**68** *20* *12* - *36*	**112** *44* *22* *10* *36*

1.2. Требования к результатам обучения по дисциплине, формы их контроля и виды оценочных средств

№ п/п	Контролируемые модули, разделы, (темы) дисциплины, их наименование	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Оценочные средства		Способ контроля
			Наименование	№№ заданий	
1	Общие понятия теории массового обслуживания (СМО)	ОПК-1, ПК-1	Опрос	1	Письменно
2	Одноканальные и многоканальные СМО	ОПК-1, ПК-1	Лабораторная работа (см. приложение)	1	Защита отчета
Промежуточная аттестация: зачет		ОПК-1, ПК-1	Лабораторная работа (см. приложение)		Защита отчета
1	Математические модели в экономике	ОПК-1, ПК-1	Лабораторная работа (см. приложение)	2	Защита отчета

2	Математические модели в экологии и биологии	ОПК-1, ПК-1	Лабораторная работа (см. приложение)	3	Защита отчета
Промежуточная аттестация: экзамен		ОПК-1, ПК-1	КИМ		Письменно

1.3. В результате изучения дисциплины «Непрерывные и дискретные математические модели» обучающийся должен:
1.3.1. Знать:
- основные понятия теории разностных схем, методы их составления, исследование и применение на практике;
- методы исследования сходимости разностных схем.

1.3.2. Уметь:
- исследовать на сходимость разностные схемы.

1.3.3. Владеть:
- практическим умением анализировать полученные результаты и формировать выводы;
- навыками применения современного математического аппарата в исследовательской и прикладной деятельности.

1.4. Показатели и критерии определения уровня сформированности компетенций

№ п/п	Код компетенции	Уровни сформированности компетенции			
		Недостаточный	Удовлетворительный (достаточный)	Базовый	Повышенный
	ОПК-1	Отсутствие признаков удовлетворительного уровня	**Знать:** основные базовые дисциплины, необходимые для изучения курса **Уметь:** применять полученные знания при исследовании непрерывных и дискретных математических моделей **Владеть:** навыками выбора методов исследования непрерывных и дискретных математических моделей	**Знать:** необходимые базовые дисциплины для изучения курса **Уметь:** реализовывать на практике приобретенные знания при исследовании непрерывных и дискретных математических моделей **Владеть:** практическим опытом исследования непрерывных и дискретных математических моделей	**Знать:** необходимый базовый математический аппарат для изучения курса **Уметь:** использовать полученные знания при исследовании непрерывных и дискретных математических моделей **Владеть:** практическими навыками исследования непрерывных и дискретных математических моделей
	ПК-1	Отсутствие признаков удовлетворительного уровня	**Знать:** методы и приемы сбора и обработки статистических данных в рамках исследования операций	**Знать:** формулировки стандартных задач прикладного научно - исследовательского направления	**Знать:** методы решения математических задач в рамках непрерывных и дискретных моделей

			Уметь: применять соответствующие методы в решении задач исследования операций **Владеть:** навыками современного математического аппарата и информационных технологий в исследовательской и прикладной деятельности	**Уметь:** применять соответствующие методы в решении задач научно – прикладного характера **Владеть:** современным математическим аппаратом и информационными технологиями	**Уметь:** применять соответствующие методы в решении задач научно – прикладного характера **Владеть:** современным математическим аппаратом и информационными технологиями

2. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И ИНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ОЦЕНКИ знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения дисциплины «Непрерывные и дискретные математические модели»

2.1 Вопросы к зачету

По учебному плану дисциплины в течение всего учебного цикла предусмотрено выполнение 3 лабораторных работ, название и содержание которых приводится в соответствующей рабочей программе дисциплины. Кроме того, на профильной кафедре, в научной библиотеке и на сайте ДГУ имеется лабораторный практикум по каждому разделу настоящей дисциплины.

Критерии оценивания

− **оценка «зачтено»** выставляется студенту, который успешно защитил не менее 2/3 отчетов по лабораторным работам, прочно усвоил предусмотренный программный материал; правильно, аргументировано ответил на все вопросы, с приведением примеров;

− **оценка «не зачтено»** выставляется студенту, который не представил к защите 2/3 и более отчетов по лабораторным работам и не справляется с 50% вопросов и в ответах на другие вопросы допустил существенные ошибки. Не может ответить на дополнительные вопросы, предложенные преподавателем.

2.2 Вопросы к экзамену

1. Понятие и цели математического моделирования, построение содержательной модели.
2. Исследование математической модели.
3. Анализ полученных результатов и коррекция модели.
4. Классификация математических моделей.
5. Цель и предмет задачи теории массового обслуживания.
6. Уравнения Колмогорова.
7. Одноканальные системы массового обслуживания, классификация, примеры.

8. Многоканальные системы массового обслуживания, классификация, примеры.
9. Непрерывные математические модели в экономике.
10. Непрерывные математические модели в экологии.
11. Непрерывные математические модели в биологии.

Критерии оценивания

- о**ценки "отлично"** заслуживает студент, обнаруживший всестороннее, систематическое и глубокое знание учебно-программного материала, умение свободно выполнять задания, предусмотренные программой, усвоивший основную и знакомый с дополнительной литературой, рекомендованной программой. Как правило, оценка "отлично" выставляется студентам, усвоившим взаимосвязь основных понятий дисциплины в их значении для приобретаемой профессии, проявившим творческие способности в понимании, изложении и использовании учебно-программного материала.

- о**ценки "хорошо"** заслуживает студент, обнаруживший полное знание учебно-программного материала, успешно выполняющий предусмотренные в программе задания, усвоивший основную литературу, рекомендованную в программе. Как правило, оценка "хорошо" выставляется студентам, показавшим систематический характер знаний по дисциплине и способным к их самостоятельному пополнению и обновлению в ходе дальнейшей учебной работы и профессиональной деятельности.

-оценки "удовлетворительно" заслуживает студент, обнаруживший знания основного учебно-программного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и предстоящей работы по специальности, справляющийся с выполнением заданий, предусмотренных программой, знакомый с основной литературой, рекомендованной программой. Как правило, оценка "удовлетворительно" выставляется студентам, допустившим погрешности в ответе на экзамене и при выполнении экзаменационных заданий, но обладающим необходимыми знаниями для их устранения под руководством преподавателя.

-оценка "неудовлетворительно" выставляется студенту, обнаружившему пробелы в знаниях основного учебно-программного материала, допустившему принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой заданий. Как правило, оценка "неудовлетворительно" ставится студентам, которые не могут продолжить обучение или приступить к профессиональной деятельности по окончании вуза без дополнительных занятий по соответствующей дисциплине.

Рекомендуемые границы оценок:
«отлично» - не менее 86% правильных ответов,
«хорошо» - 66-85% правильных ответов,
«удовлетворительно» - 51-65% правильных ответов,
«неудовлетворительно» - менее 50% правильных ответов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Лабораторная работа № 1

Тема: Математическая модель системы массового обслуживания.

Цель: Научиться определять основные параметры эффективности работы основных видов СМО.

Теоретическая часть.

Основные типы систем массового обслуживания – СМО с отказами, без отказов, с ограниченной очередью и с бесконечной очередью.

Теория массового обслуживания и метод статистических испытаний (Монте-Карло), так же как и теория вероятностей и математическая статистика, применяются в тех экономических задачах, в которых решение определяется случайными факторами и обстоятельствами. То есть такими, которые могут принимать различные, заранее не известные значения.

Теория массового обслуживания дает возможность учесть эти случайности в процессах, связанных с потоками требований (заказов, обстоятельств) на обслуживание. Метод Монте-Карло, или метод статистических испытаний, позволяет искусственно моделировать случайные процессы в тех случаях, когда установление аналитических (т.е. построенных с помощью формул) моделей невозможно или затруднительно.

Многие экономические ситуации связаны с процессами массового обслуживания покупателей-потребителей. Например, в течение ограниченного времени необходимо обслужить покупателей магазинов, клиентов сферы обслуживания, принять заявки на ремонтные работы и выполнить по ним ремонт и т.п. Обслуживаемые объекты называют каналами или аппаратами обслуживания. Требования (заказы) на обслуживание называют заявками. Если при поступлении очередной заявки все имеющиеся каналы (аппараты) оказываются занятыми, происходит сбой в обслуживании и начинает образовываться очередь. Поэтому теорию массового обслуживания называют также теорией очередей. Теория массового обслуживания ставит своей задачей организовать обслуживание таким образом, чтобы длина очереди была минимальной, а время прохождения заявки - оптимальным. При этом должно обеспечиваться минимальное время простоя помещений, оборудования и персонала системы обслуживания и ее максимальная возможная загрузка.

Заявка, поступившая в систему с отказами и нашедшая все каналы занятыми, получает отказ и покидает систему необслуженной. Показателем качества обслуживания выступает вероятность получения отказа. Предполагается, что все каналы доступны в равной степени всем заявкам, входящий поток является простейшим, длительность (время) обслуживания одной заявки ($T_{\text{обс}}$) распределена по показательному закону. Значения основных показателей эффективности работы системы массового обслуживания с отказами можно вычислить по следующим зависимостям:

1. Вероятность простоя каналов обслуживания, когда нет заявок ($K = 0$)

$$P_0 = \frac{1}{\sum \rho^k / _{k!}}.$$

2. Вероятность отказа в обслуживании, когда поступившая на обслуживание заявка найдет все каналы занятыми ($K = \text{П}$)

$$P_{\text{отк}} = P_n = \frac{P_0 \rho^n}{n!}.$$

3. Вероятность обслуживания

$$P_{обсл} = 1 - P_{отк}.$$

4. Среднее число занятых обслуживанием каналов
$$\bar{n} = \rho P_{обсл}\ .$$
5. Доля каналов, занятых обслуживанием
$$k = \frac{\bar{n}}{n}\,.$$
6. Абсолютная пропускная способность
$$A = \lambda P_{обсл}.$$

Заявка, поступившая в систему с неограниченным ожида-нием и нашедшая все каналы занятыми, становится в очередь, ожидая освобождения одного из каналов. Основной характеристикой качества обслуживания является время ожидания (время пребывания заявки в очереди).

Для систем с ожиданием существует дисциплина очереди:
1) обслуживание в порядке очереди по принципу "первым пришел — первым обслужен";
2) случайное неорганизованное обслуживание по принципу "последний пришел — первым обслужен";
3) обслуживание с приоритетами по принципу "генералы и полковники вне очереди". Значения основных показателей эффективности работы системы массового обслуживания можно вычислить по следующим зависимостям:

1. Вероятность простоя каналов, когда нет заявок ($K = 0$)
$$P_0 = 1/\sum_{k=0}^{n}(\rho^k/k!) + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\,.$$
Предполагается, что $\frac{\rho}{n} < 1$.
2. Вероятность занятости обслуживанием K заявок
$$P_k = \rho^k P_0/k!, \qquad 1 \le k \le n.$$
3. Вероятность занятости обслуживанием всех каналов
$$P_n = \rho^n P_0/n!.$$
4. Вероятность того, что заявка окажется в очереди
$$P_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} P_0\ .$$
5. Среднее число заявок в очереди
$$\bar{L}_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2} P_0\ .$$
6. Среднее время ожидания заявки в очереди
$$\bar{t}_{оч} = \bar{L}_{оч}/\lambda..$$
7. Среднее время пребывания заявки в СМО
$$\bar{t}_{СМО} = \bar{t}_{оч} + \bar{t}_{обс}.$$
8. Среднее число занятых обслуживанием каналов
$$\bar{n}_з = \rho.$$
9. Среднее число свободных каналов
$$\bar{n}_{СВ} = n - \bar{n}_з.$$
10. Коэффициент занятости каналов обслуживания
$$k_з = \bar{n}_з/n.$$
11. Среднее число заявок в СМО
$$\bar{z} = \bar{L}_{оч} + \bar{n}_з.$$

Заявка, поступившая в систему с ожиданием с ограниченной длиной очереди и нашедшая все каналы и ограниченную очередь занятыми, покидает систему необслуженной. Основной характеристикой качества системы является отказ заявке в обслуживании. Ограничения на длину очереди можно считать следующими: ограничения сверху времени пребывания заявки в очереди; ограничения сверху длины очереди; ограничения общего времени пребывания заявки в системе. Значения основных показателей эффективности системы массового обслуживания с бесконечной очередью, можно вычислить по следующим зависимостям

1. Вероятность простоя каналов обслуживания, когда нет заявок ($K=0$)

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\left[1-\left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right]}.$$

2. Вероятность отказа в обслуживании

$$P_{\text{отк}} = \frac{\rho^{n+m}}{n!n^m}P_0 \;.$$

3. Вероятность обслуживания

$$P_{\text{обсл}} = 1 - P_{\text{отк}}.$$

4. Абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda P_{\text{обсл}}.$$

5. Среднее число занятых каналов

$$n = \frac{A}{\mu}\,.$$

6. Среднее число заявок в очереди

$$\bar{L}_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}\cdot\frac{1-\left(\frac{\rho}{n}\right)^m\left(m+1-m\frac{\rho}{n}\right)}{\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}P_0.$$

7. Среднее время ожидания обслуживания

$$t_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda}.$$

8. Среднее число заявок в системе

$$z = L_{\text{оч}} + n.$$

9. Среднее время пребывания в системе

$$t_{\text{СМО}} = \frac{z}{\lambda}\,.$$

Задачи для лабораторной работы

Задача №1

Контроль готовой продукции фирмы осуществляют A контролеров. Если изделие поступает на контроль, когда все контролеры заняты проверкой готовых изделий, то оно остается непроверенным. Среднее число изделий, выпускаемых фирмой, составляет B изд./ч. Среднее время на проверку одного изделия — C мин. Определить вероятность того, что изделие пройдет проверку, насколько загружены контролеры и сколько их необходимо поставить, чтобы $P_{\text{обс}} \geq D$. Значения параметров представлены в таблице 1.

Таблица 1

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	3	4	5	6	7
B	15	23	33	21	12	15	34	25	27	35	29	30	24	19	20
C	7	4	5	8	9	3	5	6	4	7	8	9	10	6	4
D	0,99	0,98	0,87	0.96	0,95	0,97	0,99	0,9	0,8	0,9	0,8	0,7	0,9	0,8	0,6

Задача №2

Приходная касса городского района с временем работы A часов в день проводит прием от населения коммунальных услуг и различных платежей в среднем от B человек в день.

В приходной кассе работают C операторов-кассиров. Средняя продолжительность обслуживания одного клиента составляет D мин.

Определить характеристики работы приходной кассы как объекта СМО. Значения параметров представлены в таблице 2.

Таблица 2

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	3	4	5	6	7
B	15	23	33	21	12	15	34	25	27	35	29	30	24	19	20
C	7	4	5	8	9	3	5	6	4	7	8	9	10	6	4
D	0,99	0,98	0,87	0.96	0,95	0,97	0,99	0,9	0,8	0,9	0,8	0,7	0,9	0,8	0,6

Задача №3

На АЗС установлено A колонок для выдачи бензина. Около станции находится площадка на B автомашин для ожидания заправки. На станцию прибывает в среднем C маш./ч. Среднее время заправки одной автомашины — D мин.

Определить вероятность отказа и среднюю длину очереди. Значения параметров представлены в таблице.

Таблица 3

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	3	4	5	6	7
B	15	23	33	21	12	15	34	25	27	35	29	30	24	19	20
C	7	4	5	8	9	3	5	6	4	7	8	9	10	6	4
D	0,99	0,98	0,87	0.96	0,95	0,97	0,99	0,9	0,8	0,9	0,8	0,7	0,9	0,8	0,6

Отчет может содержать: краткие теоретические сведения о математической модели, представленной в задаче СМО и решение в среде Excel.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гмурман В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. - М. «Высшая школа», 1972
2. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для ВУЗов. В 2-х ч. - 6-е изд - М.: Изд. дом ОНИКС, Мир и образование, 2007. - 304с.
3. Шипачев В.С. Высшая математика: учеб. пособие для бакалавров. - 8-е изд., перераб. и доп. - М.: Юрайт, 2013. - 447с.
4. Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика: учебник для студ. вузов. - 5-е изд., перераб. и доп. - М.: Юрайт, 2014. - 396с.
5. Виленкин И.В., Гробер В.М. Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов. - 4-е изд., испр. - Ростов н/Д: Феникс, 2008. - 414с.

Лабораторная работа № 2

Тема: Модель макроэкономической динамики Солоу.

Цель: изучение модели Солоу, исследование возможности внесения в нее изменений и изучение поведения модели при смене значений некоторых параметров, что соответствует регулированию экономической системы.

Задание 1. Построить имитационную схему для модели Солоу и проследить ее динамику на протяжении 30 лет для следующих значений параметров:
$\nu = 0{,}1, \quad \mu = 0{,}3, \quad \rho = 0{,}4, \quad X = 3K^{0{,}6}L^{0{,}4}$.
Начальные значения переменных:
$K = 800000, \quad L = 1000000$.
ν – темп прироста населения;
μ – темп потерь фондов;
ρ – норма накопления;
K – объем основных производственных фондов;
L – трудовые ресурсы.

Построим имитационную схему для модели Солоу и проследим ее динамику на протяжении 50 лет:

Найдем значения K иL, воспользовавшись следующими соотношениями:
$L(t+1) = (1+\nu)L(t)$,
$K(t+1) = (1-\mu)K(t) + I(t)$.

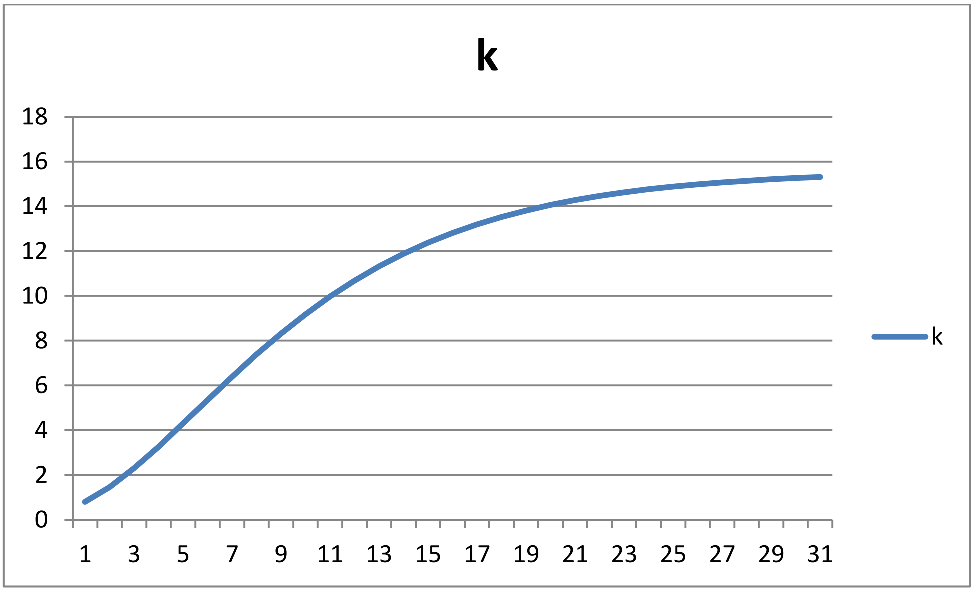
Система уравнений модели выглядит следующим образом:
$\frac{dL}{dt} = \nu L$,
$\frac{dK}{dt} = -\mu K + I$,
$X = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$,
$I = \rho X$ - инвестиции,
$C = (1-\rho)X$ - непроизводственное потребление,
$c = \frac{C}{L}$ - норма потребления.

Найдем решение с использованием электронных таблиц Microsoft Excel:

t	K	L	X	I	C	k
0	800000	1000000	2624069	1049628	1574441	0,8
1	1609628	1100000	4146805	1658722	2488083	1,463298
2	2785461	1210000	5986509	2394604	3591906	2,302034
3	4344427	1331000	8119924	3247970	4871954	3,264032
4	6289068	1464100	10531769	4212708	6319061	4,295518
5	8615055	1610510	13214827	5285931	7928896	5,349272
6	11316469	1771561	16169265	6467706	9701559	6,387852
7	14389234	1948717	19401861	7760744	11641117	7,383952
8	17833208	2143589	22925327	9170131	13755196	8,319323
9	21653377	2357948	26757794	10703117	16054676	9,183145
10	25860481	2593742	30922454	12368982	18553473	9,970335

11	30471319	2853117	35447354	14178941	21268412	10,68001
12	35508864	3138428	40365303	16146121	24219182	11,31422
13	41002326	3452271	45713904	18285562	27428343	11,87691
14	46987190	3797498	51535676	20614270	30921406	12,3732
15	53505303	4177248	57878260	23151304	34726956	12,80874
16	60605016	4594973	64794715	25917886	38876829	13,18942
17	68341397	5054470	72343885	28937554	43406331	13,52098
18	76776532	5559917	80590840	32236336	48354504	13,80893
19	85979908	6115909	89607394	35842958	53764437	14,0584
20	96028894	6727500	99472697	39789079	59683618	14,27408
21	1,07E+08	7400250	1,1E+08	44109560	66164340	14,46023
22	1,19E+08	8140275	1,22E+08	48842765	73264148	14,62065
23	1,32E+08	8954302	1,35E+08	54030896	81046344	14,75872
24	1,47E+08	9849733	1,49E+08	59720363	89580544	14,87743
25	1,62E+08	10834706	1,65E+08	65962199	98943299	14,97941
26	1,8E+08	11918177	1,82E+08	72812518	1,09E+08	15,06694
27	1,99E+08	13109994	2,01E+08	80333013	1,2E+08	15,14202
28	2,19E+08	14420994	2,21E+08	88591517	1,33E+08	15,20639
29	2,42E+08	15863093	2,44E+08	97662611	1,46E+08	15,26155
30	2,67E+08	17449402	2,69E+08	1,08E+08	1,61E+08	15,3088

Как видно из расчетов при увеличении объемов инвестиций и потребления в динамике за 30 лет фондовооруженность увеличивается, что соответствует первому режиму изменения фондовооруженности.



Задание 2. Вычислить стационарное значение фондовооруженности.
Найдем значение стационарной фондовооруженности по формуле:

$$k^* = \left(\frac{\rho A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

В нашем случае $k^* = 15{,}58846$.
Вычислим теоретические значения критической фондовооруженности $\hat{k}$ по формуле

$$\hat{k} = \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} k^* .$$

Получили $\hat{k} = 4{,}346916$.

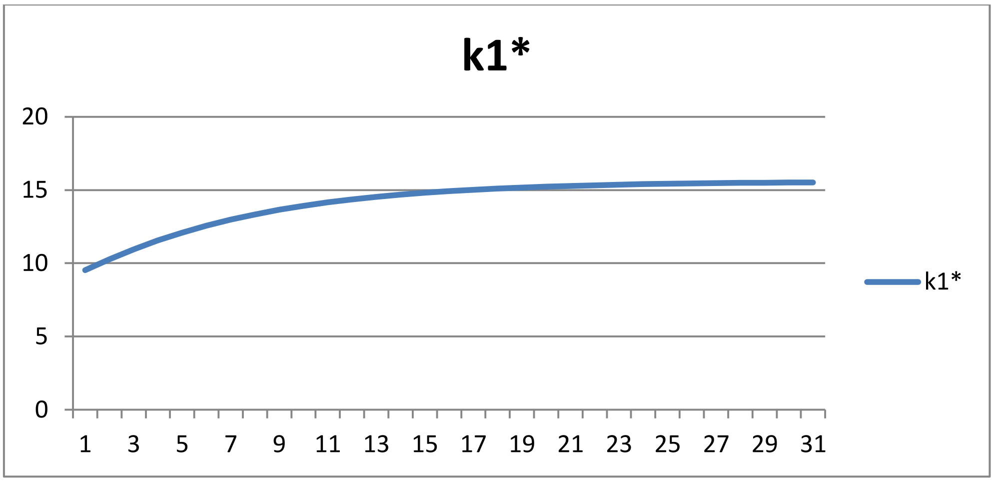
Задание 3. Подобрать начальные значения K, L таким образом, чтобы смоделировать два режима изменения фодовооруженности.

Начальные параметры берем $K = 13570000$ и $L = 1425000$. Остальные параметры оставим без изменений

t	$K1$	$L1$	$k1^*$	$X1$	$I1$
0	13570000	1425000	9,522807	16527041	6610816
1	16109816	1567500	10,27739	19030869	7612348
2	18889219	1724250	10,95504	21751527	8700611
3	21923064	1896675	11,55868	24709228	9883691
4	25229836	2086343	12,09285	27926992	11170797
5	28831682	2294977	12,56295	31430737	12572295
6	32754472	2524474	12,97477	35249423	14099769
7	37027900	2776922	13,33415	39415239	15766096
8	41685625	3054614	13,64677	43963837	17585535
9	46765472	3360075	13,91798	48934602	19573841
10	52309672	3696083	14,15273	54370977	21748391
11	58365161	4065691	14,35553	60320819	24128327
12	64983940	4472260	14,53045	66836810	26734724
13	72223482	4919486	14,6811	73976915	29590766
14	80147203	5411435	14,81071	81804889	32721956
15	88824998	5952579	14,9221	90390843	36156337
16	98333836	6547837	15,01776	99811866	39924746
17	1,09E+08	7202620	15,09984	1,1E+08	44061087
18	1,2E+08	7922882	15,17024	1,22E+08	48602638
19	1,33E+08	8715170	15,23057	1,34E+08	53590383
20	1,47E+08	9586687	15,28227	1,48E+08	59069386
21	1,62E+08	10545356	15,32654	1,63E+08	65089200

22	1,78E+08	11599892	15,36444	1,79E+08	71704308
23	1,96E+08	12759881	15,39688	1,97E+08	78974626
24	2,16E+08	14035869	15,42465	2,17E+08	86966037
25	2,39E+08	15439456	15,4484	2,39E+08	95750997
26	2,63E+08	16983402	15,46871	2,64E+08	1,05E+08
27	2,89E+08	18681742	15,48609	2,9E+08	1,16E+08
28	3,19E+08	20549916	15,50095	3,19E+08	1,28E+08
29	3,51E+08	22604907	15,51366	3,51E+08	1,41E+08
30	3,86E+08	24865398	15,52452	3,87E+08	1,55E+08

Эти данные соответствуют второму режиму фондовооруженности.



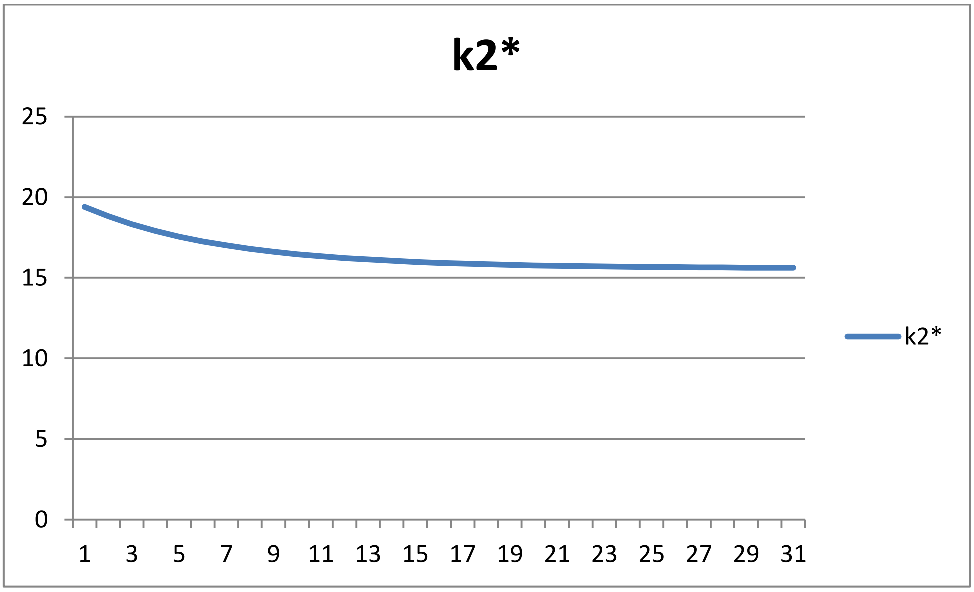
Вычисляем аналогично, взяв за начальные параметры $K = 13000000$ и $L = 670000$.

.

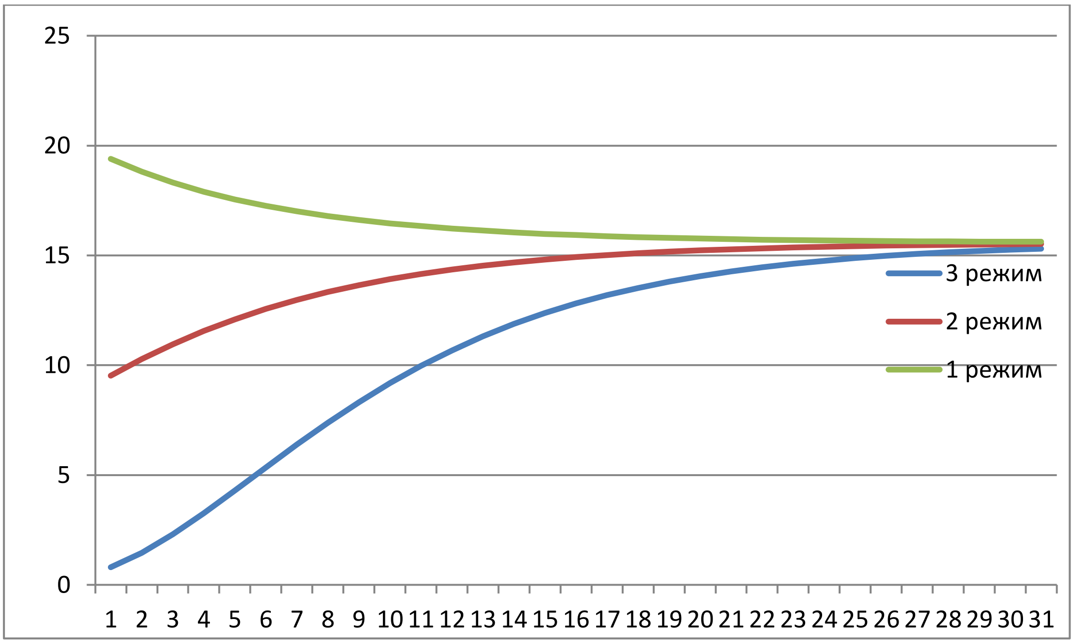
t	K2	L2	$k2^*$	X2	I2
0	13000000	670000	19,40299	11910149	4764060
1	13864060	737000	18,81148	12860045	5144018
2	14848860	810700	18,3161	13921345	5568538
3	15962740	891770	17,90006	15103822	6041529
4	17215447	980947	17,54982	16418385	6567354
5	18618167	1079042	17,25435	17877167	7150867
6	20183584	1186946	17,00464	19493624	7797450
7	21925958	1305640	16,79326	21282657	8513063
8	23861233	1436205	16,61409	23260739	9304295

9	26007159	1579825	16,46205	25446062	10178425
10	28383436	1737807	16,3329	27858703	11143481
11	31011887	1911588	16,2231	30520799	12208320
12	33916640	2102747	16,12968	33456751	13382700
13	37124349	2313022	16,05015	36693441	14677377
14	40664421	2544324	15,98241	40260482	16104193
15	44569287	2798756	15,92468	44190478	17676191
16	48874692	3078632	15,87546	48519328	19407731
17	53620016	3386495	15,83348	53286549	21314620
18	58848631	3725145	15,79768	58535634	23414254
19	64608295	4097659	15,76712	64314449	25725780
20	70951586	4507425	15,74105	70675668	28270267
21	77936378	4958167	15,71879	77677253	31070901
22	85626366	5453984	15,69978	85382981	34153192
23	94091648	5999383	15,68356	93863020	37545208
24	1,03E+08	6599321	15,6697	1,03E+08	41277830
25	1,14E+08	7259253	15,65786	1,13E+08	45385033
26	1,25E+08	7985178	15,64775	1,25E+08	49904196
27	1,37E+08	8783696	15,63912	1,37E+08	54876438
28	1,51E+08	9662066	15,63174	1,51E+08	60346998
29	1,66E+08	10628272	15,62544	1,66E+08	66365641
30	1,83E+08	11691100	15,62006	1,82E+08	72987114

Из таблицы видно, что эти данные соответствуют третьему режиму фондовооруженности.



Фондовооруженность асимптотически стремится к значению $k^* = \left(\frac{\rho A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, убывая при большем начальном значении и возрастая при меньшем. Возрастание является ускоренным при малых значениях фондовооруженности и замедленным при больших. Покажем данное свойство графически:



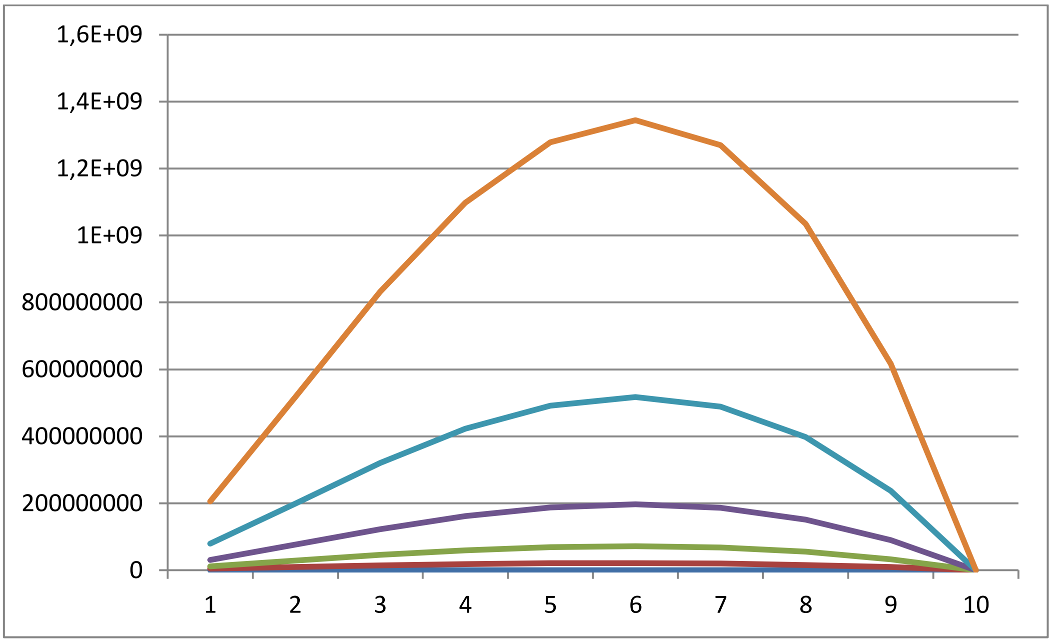
Задание 3. Проверить «золотое правило накопления».

Данная имитационная схема позволяет менять параметры исходной модели, рассматриваемые там как постоянные величины. Так, регулируя норму накопления, можно добиться увеличения в перспективе нормы потребления. «Золотое правило накопления», выводимое на основе аналитического решения, дает для нормы накопления наилучшее значение $\rho = \alpha$.

Найдем норму потребления *c* для каждого значения *p*, принадлежащий промежутку (0,1;0,9) (с шагом 0,1), на пять периодов:

ρ	*0,1*	*0,2*	*0,3*	*0,4*	*0,5*	*0,6*	*0,7*	*0,8*	*0,9*
c1	4856905	10004245	14776450	18553473	20887529,9	21420499	19849726	15910497	9365832
c2	11961891	28870245	45653272	59683618	69072526,5	72304104	68090658	55300018	32913615
c3	30689059	76507030	122570905	161442451	187778656	1,97E+08	186323741	151673744	90447695
c4	79418602	199320528	320180504	422361489	491760107	5,17E+08	488593370	397916258	2,37E+08
c5	2,06E+08	517461275	831687361	1,097E+09	1278043718	1,34E+09	1,27E+09	1,035E+09	6,17E+08

Выполнение свойства правила «золотого накопления» выглядит следующим образом:



Наибольшее производственное потреблении достигается при ставке процента, равной эластичности выпуска по капиталу.

Вывод: Построена модель Солоу и прослежена ее динамика, начислено стационарное значение фондовооруженности, найдены при различных значениях Kи L три режима фондовооруженности, проверено «золотое правило накопления».

Содержание письменного отчета

Отчет по лабораторной работе оформляется на листах формата А4 и должен иметь следующую структуру:

1) краткие теоретические сведения, необходимые для решения поставленных задач;

2) постановка задачи и математические модели, применяемые для исследования;

3) результаты применения ППП для решения задач;

4) анализ полученных результатов и выводы.

Информационные данные об экономической системе

Варианты для индивидуальных заданий

№	Производственная функция F(K, L)	μ	ν
1	$4K^{1/4}L^{3/4}$	0,09	0,04
2	$2K^{3/4}L^{1/4}$	0,05	0,02
3	$3K^{2/3}L^{1/3}$	0,08	0,01
4	$5K^{1/2}L^{1/2}$	0,07	0,04
5	$4K^{1/3}L^{2/3}$	0,09	0,03
6	$3K^{2/3}L^{1/3}$	0,1	0,02
7	$5K^{1/5}L^{4/5}$	0,05	0,01
8	$6K^{2/3}L^{1/3}$	0,08	0,04
9	$4K^{2/5}L^{3/5}$	0,07	0,03
10	$3K^{1/4}L^{3/4}$	0,09	0,05

Список использованных источников

1. Замков, О. О. Математические методы в экономике: учебник / О. О. Замков, А. В. Толстопятенко, Ю. Н. Черемных; общ. ред. А. В. Сидорович. – 4-е изд., стер. – М. : Дело и Сервис, 2004. – 368 с. – ISBN 5-86509-054-2.

2. Интриллигатор, М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интриллигатор. – М.: Прогресс, 1975.

3. Колемаев, В. А. Математическая экономика: учебник [Электронный ресурс] / В. А. Колемаев. – Юнити-Дана, 2015.

Лабораторная работа № 3

Тема: Математические модели роста численности популяций.

Цель: научиться составлять и решать (аналитически и с помощью ЭВМ) кинетические уравнения при моделировании процессов изменения численности популяций. Проводить анализ полученных решений, графическое представление результата.

Примером пространственно-временных диссипативных структур являются периодические колебания численности конкурирующих популяций «хищников»и «жертв»(например, кроликов и лис или рысей). Такие колебания наблюдаются в природе.

Периодический цикл роста и падения численности популяций является структурой в том смысле, что численность популяций каждого вида можно предсказать в любой последующий момент, зная ее численность в данный момент. Эта структура обладает временной упорядоченностью. Но процессы могут быть упорядочены также в пространстве, занимаемом эко-системой.

Задача о «хищниках и жертвах» возникает не только в экологии, но и в химии, биологии и других науках. Математически эта задача представляет собой систему дифференциальных уравнений, которые описывают две взаимодействующие подсистемы, причем одна из них черпает из другой необходимую ей для развития энергию и вещество. Основоположником математических популяционных моделей принято считать Т.Мальтуса, работавшего в конце 18-го века. Закон Мальтуса, определяющий экспоненциальный рост популяции, имеет смысл лишь на ограниченных временных интервалах. Модели, предложенные в дальнейшем, стали описывать часто наблюдаемую в природе стабилизацию численности популяции, например, за счет внутривидовой конкуренции (модель Ферхюльста). Следующим крупным шагом считается моделирование взаимодействия двух и более видов, начатое в 20-х годах нашего столетия работами А. Лоттки и В.Вольтерра.

Все процессы в сообществах живых объектов происходят во времени и в пространстве. В ряде случаев можно считать, что во всех частях рассматриваемого объема процессы синхронны. В этом случае простейшие точечные модели описываются системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = F(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где x_i – численность -й популяции (кинетические уравнения). Величины $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – нелинейные функции. Как правило, они состоят из нескольких слагаемых. Положительные члены описывают прибыль компонента, отрицательные – его убыль.

Модель естественного роста и численности популяции (модель Мальтуса)

Создание модели проведем по вышеописанной схеме.

Реальная система: имеется некоторая популяция одного вида (микроорганизмы, зайцы и т.п.), в которой происходят жизненные процессы во всем их многообразии.

Постановка задачи. Найти законы изменения численности популяции во времени.

Основные допущения.

1. Существуют только процессы размножения и естественной гибели, скорости которых пропорциональны численности особей в данный момент времени.
2. Не учитываем биохимические, физиологические процессы.
3. Нет борьбы между особями за место обитания, за пищу (бесконечно большое пространство и количество пищи).
4. Рассматриваем только одну популяцию, нет хищников.

Введем величины:

$x -$ численность популяции в момент t;

R – скорость размножения;

γ – коэффициент размножения;

S –скорость естественной гибели;
σ- коэффициент естественной гибели;
dx/dt – скорость изменения численности популяции;
epsilon(ε) - коэффициент роста.
Тогда $\boldsymbol{R = \sigma x,\ S = -\sigma x.}$

Составим дифференциальное уравнение баланса. Изменение численности особей в единицу времени определяется количеством рожденных за это время и умерших:

$$\frac{dx}{dt} = (\gamma - \sigma)x \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dt} = \varepsilon x.$$

Начальное условие: при $t = 0$ численность особей $x = x_0$. Решим уравнение:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \int_0^t \varepsilon dt,$$

$$ln\frac{x}{x_0} = \varepsilon t,$$

откуда $x = x_0 e^{\varepsilon t}$.

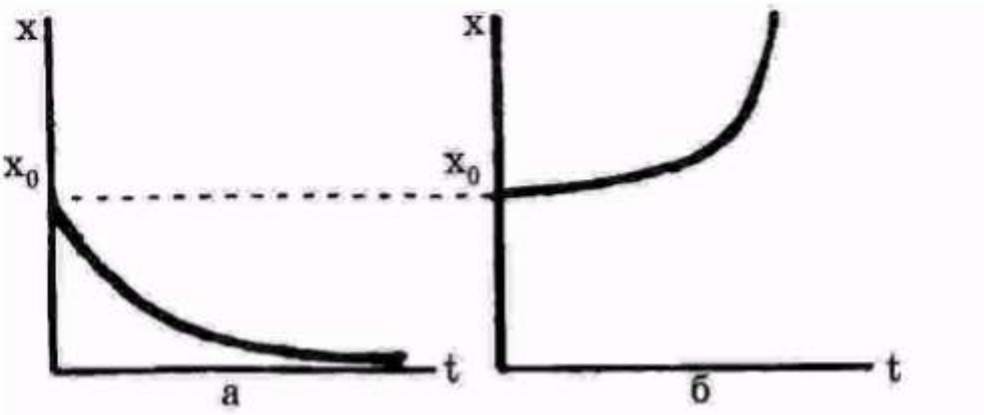


Рис. 1. Изменение численности популяции в отсутствие конкуренции между особями при $\varepsilon < 0$ (а) и при $\varepsilon > 0$ (б).

Анализ решения.
а) $\varepsilon < 0$ (при $\sigma > \gamma$), то есть скорость гибели больше скорости размножения. Численность особей со временем упадет до нуля.
б) $\varepsilon > 0$ (при $\sigma > \gamma$), то есть скорость размножения больше скорости гибели. Численность особей неограниченно растет со временем.
в) $\varepsilon = 0$ (при $\sigma = \gamma$), то есть скорость гибели равна скорости размножения. Численность особей не изменяется, оставаясь на начальном уровне.

Модель при $\varepsilon > 0$ адекватна реальности лишь до определенных значений времени. Согласно данной модели, рассматривающей уменьшение численности особей только за счет естественной гибели, их численность должна бесконечно возрастать со временем, что не соответствует реальности. При большом количестве особей возможно уменьшение их численности за счет других механизмов, например, за счет борьбы за место обитания, за пищу.

Выполнение работы

Проанализируйте поведение системы при различных параметрах $\varepsilon, \sigma, \gamma$. Для этого:

1.Запишите закон изменения $x(t)$ для заданных параметров.

2.Рассчитайте с помощью компьютера $x(t)$.

3.Постройте графики $x(t)$. Кривые $x(t)$ для разных γ должны быть представлены все на одном рисунке, соответственно для разных σ – на другом, для разных x_0 – на третьем.

4.Оцените из графиков характерные величины процесса:

Время $T_{0,5}$, когда численность особей изменится в 2 раза по сравнению с первоначальной. Сопоставьте с расчетными величинами:

$$T_{0,5} = ln2/\varepsilon.$$

Постройте график зависимости $T_{0,5}(|\varepsilon|)$. Сделайте вывод о влиянии коэффициента роста на характерное время $T_{0,5}$

1. Проанализируйте поведение системы при изменении коэффициента роста $\varepsilon > 0$ $(\gamma > \sigma)$.
2. Проанализируйте поведение системы при изменении коэффициента роста $\varepsilon < 0$ $(\gamma < \sigma)$.
3. Проанализируйте поведение системы при изменении коэффициента роста $\varepsilon = 0$ $(\gamma = \sigma)$.
4. Проанализируйте поведение системы при изменениях начальной численности особей x_0.

Схема составления отчета

Тема лабораторного занятия:
Работа N 1 (название работы)
а) цель работы
б) ход выполнения работы
в) результаты опытов
г) выводы

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1.Биофизика / под ред. В.Ф. Антонова.–М.: Владос, 2000. – 288 с.
2.Электронный учебник «Биофизика».
3.Рубин, А.Б. Биофизика: учебник: в 2 т. / А.Б. Рубин. –М.: Высшая школа, 2000.