МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет математики и компьютерных наук

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по дисциплине

Численные методы математической физики

Кафедра прикладной математики факультета
математики и компьютерных наук

Образовательная программа бакалавриата
01.03.02 - Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) программы
Математическое моделирование и вычислительная математика

Форма обучения
Очная

Статус дисциплины: входит в часть ОПОП, формируемую
участниками образовательных отношений

Махачкала, 2022

Фонд оценочных средств по дисциплине «Численные методы математической физики» составлен в 2022 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО - бакалавриат по направлению подготовки 01.03.02 - Прикладная математика и информатика от 10 января 2018 г. № 9.

Разработчик:
1. кафедра прикладной математики Абдурагимов Г.Э., к.ф.-м. н., доцент;

Фонд оценочных средств по дисциплине «Численные методы математической физики» одобрен:
на заседании кафедры прикладной математики от 25 февраля 2022г., протокол № 6.
Зав. кафедрой ________________ Кадиев Р.И.

на заседании Методической комиссии факультета математики и компьютерных наук от 24 марта 2022г., протокол № 4.
Председатель ________________ Ризаев М.К.

Фонд оценочных средств по дисциплине «Численные методы математической физики» согласован с учебно-методическим управлением «31» марта 2022г. ________________
(подпись)

Рецензент

доцент кафедры дифференциальных
уравнений и функционального анализа ДГУ ________________ Рагимханов В.Р.

1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ по дисциплине «Численные методы математической физики»

1.1. Основные сведения о дисциплине

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетные единицы (72 академических часа).

Вид работы	Трудоемкость, академических часов	
	7 семестр	всего
Общая трудоёмкость	**72**	**72**
Контактная работа:	**58**	**58**
Лекции (Л)	16	16
Практические занятия (ПЗ)	26	26
Лабораторные занятия (ЛЗ)	16	16
Консультации		
Промежуточная аттестация (зачет, экзамен)	зачет	
Самостоятельная работа:	**14**	**14**
- подготовка к лабораторной работе;	*8*	*8*
- подготовка к контрольной работе;	*2*	*2*
- самоподготовка (проработка и повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий;	*2*	*2*
- подготовка к практическим занятиям;	*2*	*2*

1.2. Требования к результатам обучения по дисциплине, формы их контроля и виды оценочных средств

№ п/п	Контролируемые модули, разделы, (темы) дисциплины, их наименование	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Оценочные средства		Способ контроля
			Наименование	№№ заданий	
1	Разностные схемы для уравнений параболического и гиперболического типов	УК-1, ОПК-1, ПК-1	Типовая контрольная работа	1	Письменно
			Лабораторная работа	1	Защита отчета
2	Разностные схемы для уравнений эллиптического типа	УК-1, ОПК-1, ПК-1	Типовая контрольная работа	2	Письменно
			Лабораторная работа	2	Защита отчета
Промежуточная аттестация: зачет		УК-1, ОПК-1, ПК-1	Лабораторные работы (см. приложение)		Защита отчета

1.3. В результате изучения дисциплины «Численные методы математической физики» обучающийся должен:

1.3.1. Знать:

- классические методы исследования сходимости разностных схем;
- основные приемы доказательства сходимости разностных схем, аппроксимирующих типичные задачи для уравнений математической физики;

1.3.2. Уметь:

- осуществлять постановку задач и выполнять эксперименты по проверки их корректности и эффективности разработанных методов;
- доказывать сходимость разностных схем, аппроксимирующих типичные задачи для уравнений математической физики;

1.3.3. Владеть:

– навыками решения практических задач;
- применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат.

1.4. Показатели и критерии определения уровня сформированности компетенций

№ п/п	Код компетенции	Уровни сформированности компетенции			
		Недостаточный	Удовлетворительный (достаточный)	Базовый	Повышенный
	УК-1	Отсутствие признаков удовлетворительного уровня	**Знать:** структуру задач в области математики, теоретической механики и физики, а также базовые составляющие таких задач	**Знать:** принципы математического моделирования разнородных явлений, систематизации и научной информации в области математики и компьютерных наук	**Знать:** современные методы сбора и анализа научного материала с использованием информационных технологий; основные методы работы с ресурсами сети Интернет
			Уметь: формулировать постановку математических задач, анализировать необходимость и (или) достаточность информации для ее решения	**Уметь:** системно подходить к решению задач на разнородные явления в области математики и компьютерных наук	**Уметь:** применять современные методы и средства автоматизированного анализа и систематизации научных данных; практически использовать научно – образовательные ресурсы Интернет в научных исследованиях
			Владеть: необходимыми профессиональными редакторами и пакетами прикладных программ	**Владеть:** навыками систематизации разнородных явлений путем математических интерпретаций и оценок	**Владеть:** навыками использования информационных технологий в организации и проведении научного исследования;

					навыками использования современных баз данных; навыками применения мультимедийных технологий обработки и представления информации; навыками автоматизации подготовки документов в различных текстовых и графических редакторах
	ОПК-1	Отсутствие признаков удовлетворительного уровня	**Знать:** теоретические основы основных математических дисциплин, а также теоретической механики и физики	**Знать:** способы использования знаний в различных областях математики при решении задач физики и механики	**Знать:** численные методы исследования задач математической физики
			Уметь: решать задачи, связанные с исследованием различных методов, полученных в области математических и физических наук	**Уметь:** применять различные численные методы при исследовании задач математической физики	**Уметь:** правильно выбирать численные методы решения задач математической физики
			Владеть: базовым математическим и естественнонаучным аппаратом	**Владеть:** навыками применения численных методов при решении задач математической физики	**Владеть:** навыками выбора численных методов решения задач математической физики
	ПК-1	Отсутствие признаков удовлетворительного уровня	**Знать:** современный математический аппарат, языки программирования и пакеты прикладных программ	**Знать:** методы исследования операций, различные языки программирования	**Знать:** методы исследования задач математической физики, современные информационные технологии
			Уметь: совершенствовать и применять в приложениях соответствующие знания;	**Уметь:** решать прикладные задачи численными методами, применять различные языки программирования в при-	**Уметь:** применять методы исследования задач математической физики, информационные технологии

			Владеть: современными математическими методами и информационными технологиями	кладных исследованиях **Владеть:** численными методами	**Владеть:** навыками применения численных методов для решения задач математической физики

2. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И ИНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ОЦЕНКИ
знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения дисциплины «Численные методы математической физики»

2.1. Комплект заданий для контрольной работы

Примерная контрольная работа по модулю 1

1. Написать разностную схему, аппроксимирующую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-(x+t)\frac{\partial u}{\partial x}+x^2+t^2,$$

u(x,0) = x.

2. Определить порядок аппроксимации смешанной граничной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-(x^2+t^2+1)u=1,\quad 0<\mathrm{t}\le 1,\ 0<\mathrm{x}<1,$$

$$u(x,0)=0,\ 0\le x\le 1,$$

$$\mathrm{u(0,t)=t},$$

$$\mathrm{u(1,t)=1+t},\quad 0\le \mathrm{t}\le 1.$$

разностной схемой

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}=\frac{u_{m+1}^n-2u_m^n+u_{m-1}^n}{h^2}-(x_m^2+t_n^2+1)\frac{u_{m+1}^n+u_{m-1}^n}{2}=1,$$

$$m=\overline{1,M-1},\ n=\overline{0,N-1},$$

$$u_m^0=0,\ m=\overline{0,M},$$

$$u_0^n=t_n,\ u_M^n=1+t_n,\quad n=\overline{0,N},$$

где $x_m=mh,\ t_n=n\tau,\ m=\overline{0,M},\ n=\overline{0,N}.$

3. Указать алгоритм нахождения методом сеток приближенного значения u(0,2; 0,1), где u(x, t) – решение задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-(xt+1),$$

$$u(x,0)=x^2.$$

4. Какую задачу и с каким порядком аппроксимирует на сетке

$\{x_m=mh,\ \ y_n=nl,\ \ m=0,\pm1,\pm2,\mathrm{K}\ ,\ \ n=0,1,2,\mathrm{K}\ \}$ разностная схема

$$\begin{cases} \dfrac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - \dfrac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{l^2} = \dfrac{e^{x_{m+1}} + e^{x_{m-1}}}{2} + y_n, \\ u_m^0 = x_m^2 + 1, \quad \dfrac{u_m^1 - u_m^0}{h} = 2x_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} ?$$

Ответ обосновать.

5. Написать разностную схему, аппроксимирующую на сетке $\{x_m = mh,\ y_n = nl, \quad m = \overline{0, M}, \quad n = \overline{0, N}\}$ задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 + y^2, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ u(x,0) = x^2,\ u(x,1) = 1 + x^2,\ u(0,y) = y^2,\ u(1,y) = 1 + y^2. \end{cases}$$

Какими методами можно найти решение полученной разностной схемы?

Примерная контрольная работа по модулю 2

1. Написать разностную схему, аппроксимирующую на сетке $\{x_m = mh,\ y_n = nl, \quad m = \overline{0, M}, \quad n = \overline{0, N}\}$ задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 + y^2, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ u(x,0) = x^2,\ u(x,1) = 1 + x^2,\ u(0,y) = y^2,\ u(1,y) = 1 + y^2. \end{cases}$$

Какими методами можно найти решение полученной разностной схемы?

2. Определить порядок аппроксимации задачи Дирихле в области D={0<x<1, 0 < y<2} с границей Г

$$u_{xx} + u_{yy} = x^2 + y^2, \quad (\mathrm{x, y}) \in \mathrm{D},$$

$$\mathrm{u}\big|_{\Gamma} = 0$$

разностной схемой

$$\begin{cases} \dfrac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{h^2} + \dfrac{u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}}{l^2} = \dfrac{x_{m+1}^2 + y_{n+1}^2 + x_{m-1}^2 + y_{n-1}^2}{2}, \\ u\,|_{\Gamma_h} = 0 \end{cases}$$

на сетке $(x_m, y_n) \in D_h^0$, $x_m = mh$, $y_n = nl$, где D_h^0, Γ_h –внутренняя сеточная область и сеточная граница соответственно.

Привести соответствующий этой разностной схеме шаблон. Сходится ли решение этой разностной схемы к решению соответствующей задачи, если $l > h$? Почему?

Критерии оценки:

– **оценка «отлично»** выставляется студенту, если он правильно отвечает более чем на 85% заданий.

– **оценка «хорошо»** выставляется студенту, если он правильно отвечает от 65% и до 85% заданий;

– **оценка «удовлетворительно»** выставляется студенту, если он правильно отвечает от 50% и до 64% заданий;

– **оценка «неудовлетворительно»** выставляется студенту, если он правильно отвечает менее чем на 50% заданий.

2.2 Вопросы к зачету.

По учебному плану дисциплины в течение 7 семестра предусмотрено выполнение 2 лабораторных работ, название и содержание которых приводится в соответствующей рабочей программе дисциплины. Кроме того, на профильной кафедре, в научной библиотеке и на сайте ДГУ имеется лабораторный практикум по каждому разделу настоящей дисциплины.

Критерии оценивания

− **оценка «зачтено»** выставляется студенту, который успешно защитил не менее 2/3 отчетов по лабораторным работам, прочно усвоил предусмотренный программный материал; правильно, аргументировано ответил на все вопросы, с приведением примеров;

− **оценка «не зачтено»** выставляется студенту, который не представил к защите 2/3 и более отчетов по лабораторным работам и не справляется с 50% вопросов и в ответах на другие вопросы допустил существенные ошибки. Не может ответить на дополнительные вопросы, предложенные преподавателем.

Лабораторная работа № 1
Разностные схемы для уравнений параболического типа

Задание 1

Решить в прямоугольнике $\overline{D} = \{a \le x \le b,\ 0 \le t \le T\}$ задачу Коши методом сеток с помощью явной двухслойной разностной схемы. Шаг h по оси ox взять $\le 0.05,$ а шаг τ по оси ot выбрать из условия устойчивости.

В отчет по этому заданию включить:

1. явную разностную схему, аппроксимирующую данную задачу Коши;
2. обоснование выбора шага τ по оси ot;
3. алгоритмы выполнения задания;
4. программы по составленному алгоритму;
5. тестовую задачу для проверки работы программы, её точное решение и решение, полученное по программе для этой задачи;
6. таблицу значений решения задачи Коши в прямоугольнике $\overline{D}$. Таблица должна состоять из 11 строк и 11 столбцов;
7. график решения задачи в $\overline{D}$;
8. выводы относительно полученных результатов.

Задание 2

Решить в прямоугольнике $\overline{D} = \{a \le x \le b,\ 0 \le t \le T\}$ смешанную граничную задачу методом сеток с помощью неявной двухслойной разностной схемы. Шаги h и τ по осям взять ≤ 0.05.

В отчет по этому заданию включить:

1.неявную разностную схему, аппроксимирующие данную смешанную граничную задачу;
2.алгоритм выполнения задания;
3. программу по составленному алгоритму;
4. тестовую задачу для проверки работы программы, её точное решение и решение, полученное по программе для этой задачи;
5. таблицу значений решения задачи Коши в прямоугольнике $\overline{D}$. Таблица должна состоять из 11 строк и 11 столбцов;
6. график решения задачи в $\overline{D}$;
7. выводы относительно полученных результатов.

Значения решения $u(x,t)$ в обоих заданиях выписать с тремя десятичными знаками.

<u>**Лабораторная работа, оформленная в соответствии с приведенными здесь требованиями, допускается к зачету только после демонстрации преподавателю на компьютере полученных результатов.**</u>

ВАРИАНТЫ К ЗАДАНИЮ 1

Вариант 1.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{t + x^2}{1 + t^2}, \quad (x,t) \in D = \{-1 < x < 1, \qquad 0 < t < 1\},$$

$$u(x,0) = e^x, -1 \le x \le 1.$$

Вариант 2.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{sin(xt)}{2+t^2},\quad (x,t)\in D=\{0<x<1,\qquad 0<t<0.5\},$$

$$u(x,0)=\frac{sinx}{2+x},0\le x\le 1.$$

Вариант 3.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{sin(xt)}{1+cos(xt^2)},(x,t)\in D=\{0<x<1,0<t<0.5\},$$

$$u(x,0)=\frac{sin(e^{-x})}{1+x^2},\qquad 0\le x\le 1.$$

Вариант 4.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{e^{sinx}}{1+x^2t^2},(x,t)\in D=\{0<x<2,0<t<1\},$$

$$u(x,0)=\frac{e^{-x}}{1+x^2},\qquad 0\le x\le 2.$$

Вариант 5.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{e^{-x}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{sinx}{2+sin(xt)},(x,t)\in D=\{1<x<3,0<t<1\},$$

$$u(x,0)=\frac{cosx}{2+sinx},\qquad 1\le x\le 3.$$

Вариант 6.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{e^{xt}}{e^{xt}+1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{sinx}{2+x},(x,t)\in D=\{0<x<3,0<t<1\},$$

$$u(x,0)=\frac{2+cosx}{2+sinx},\qquad 0\le x\le 3.$$

Вариант 7.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1+x}{sinx+2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{xt}{2+x},(x,t)\in D=\{0<x<2,0<t<1\},$$

$$u(x,0)=\frac{cosx}{2+x^2},\qquad 0\le x\le 2.$$

Вариант 8.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1+x}{1+2x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{4sinx}{2+x},(x,t)\in D=\{0<x<2,0<t<1\},$$

$$u(x,0)=\frac{cosx}{1+x^2},\qquad 0\le x\le 2.$$

Вариант 9.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{3sin^2x}{2+cosx},(x,t)\in D=\{0<x<2,0<t<1\},$$

$$u(x,0)=2+sinx,\qquad 0\le x\le 2.$$

Вариант 10.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{5sin^2x}{2+x}, (x,t) \in D = \{0 < x < 1, 0 < t < 1\},$$

$$u(x,0) = 4x, \qquad 0 \le x \le 1.$$

ВАРИАНТЫ К ЗАДАНИЮ 2

Вариант 1.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2e^{sinx}}{2+tx}, (x,t) \in D = \{-1 < x < 1, 0 < t < 1\},$$

$$u(x,0) = 4sinx, \qquad -1 \le x \le 1,$$

$$u(-1,t) = 2t^2, \; u(1,t) = 4t^2 + 1, 0 \le t \le 1.$$

Вариант 2.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{e^{sin(xt)}}{1+x}, (x,t) \in D = \{0 < x < 2, 0 < t < 1\},$$

$$u(x,0) = 2 + sinx, \qquad 0 \le x \le 2,$$

$$u(-1,t) = t, \; u(1,t) = t^2 + cost, \; 0 \le t \le 1.$$

Вариант 3.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{e^x}{e^x+2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{sinx}{2+x}, (x,t) \in D = \{1 < x < 3, 0 < t < 1\},$$

$$u(x,0) = \frac{2+cosx}{2+sinx}, \qquad 1 \le x \le 3,$$

$$u(1,t) = t + 1, \qquad u(3,t) = 3t + 1, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Вариант 4.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1+x}{sinx+2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{x}{2+x}, (x,t) \in D = \{0 < x < 2, 0 < t < 1\},$$

$$u(x,0) = \frac{cosx}{2+x^2}, \qquad 0 \le x \le 2,$$

$$u(0,t) = sint, \;\; u(2,t) = 2 + sint, \;\; 0 \le t \le 1.$$

Вариант 5.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1+tx}{1+2tx}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{4sin(tx)}{1+x}, (x,t) \in D = \{1 < x < 3, 0 < t < 1\},$$

$$u(x,0) = cosx, \qquad 1 \le x \le 3,$$

$$u(1,t) = t^2, \;\; u(3,t) = t^2 + 3, \;\; 0 \le t \le 1.$$

Вариант 6.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{4sinx}{2+x}, (x,t) \in D = \{0 < x < 3, \qquad 0 < t < 1\},$$

$$\boldsymbol{u(x,0)=\frac{cosx}{1+x^2},\qquad 0\le x\le 3,}$$

$$\boldsymbol{u(1,t)=t,\ \ u(3,t)=3t,\ \ 0\le t\le 1.}$$

Вариант 7.

$$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial t}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4tsin^2x,(x,t)\in D=\{0}<x<3,\qquad 0<t<1\},$$

$$\boldsymbol{u(x,0)=\frac{cosx}{1+x^2},\qquad 0\le x\le 3,}$$

$$\boldsymbol{u(0,t)=sint,\ \ u(3,t)=3sint,\ \ 0\le t\le 1.}$$

Вариант 8.

$$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial t}=e^{-xt}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+tsin^2x,(x,t)\in D=\{0}<x<3,\qquad 0<t<1\},$$

$$\boldsymbol{u(x,0)=cosx,\qquad 0\le x\le 3,}$$

$$\boldsymbol{u(0,t)=sint,\ \ u(3,t)=sint+3,\ \ 0\le t\le 1.}$$

Вариант 9.

$$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+e^tsin^2x,(x,t)\in D=\{0}<x<2,\qquad 0<t<1\},$$

$$\boldsymbol{u(x,0)=1+cosx,\qquad 0\le x\le 2,}$$

$$\boldsymbol{u(0,t)=1+sint,\ \ u(2,t)=sint+4,\ \ 0\le t\le 1.}$$

Вариант 10.

$$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+e^{tsin^2x},(x,t)\in D=\{0}<x<2,\qquad 0<t<0.5\},$$

$$\boldsymbol{u(x,0)=sinx,\qquad 0\le x\le 2,}$$

$$\boldsymbol{u(0,t)=1+sint,\ \ u(2,t)=sint+3,\ \ 0\le t\le 0.5.}$$

Краткий теоретический материал

Типичными задачами для уравнения теплопроводности являются задача Коши, смешанная граничная задача. Для решения таких задач применяются в основном разностные (явные и неявные) схемы, составленные методом сеток.

Рассмотрим сначала задачу Коши для простейшего уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\ -\infty<x<+\infty,t>0, \tag{1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x). \tag{2}$$

Здесь $a(x,t),\ f(x,t), \varphi(x)$- заданные функции, $a(x,t) > 0$. Предположим, что эти функции настолько гладкими, что задача (1), (2) имеет единственное решение $u(x,t)$ и ограничены $\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|,\ \left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|$ при $-\infty < x < +\infty, t > 0$.

На сетке

$$\bar{\omega}_{h,\tau} = \{(x_m, t_n): x_m = mh,\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots t_n = n\tau, \quad n = 0,1,\ldots, \},$$

где h и τ шаги по осям ox и ot соответственно, пользуясь шаблоном

$$\begin{array}{ccccc} & & (\mathrm{m}, \mathrm{n}+1) & & \\ & & * & & \\ & & | & & \\ \bullet & \text{----------} & \bullet & \text{---------} & \bullet \\ (\mathrm{m}-1, \mathrm{n}) & & (\mathrm{m}, \mathrm{n}) & & (\mathrm{m}+1, \mathrm{n}) \end{array}$$

задачу (1), (2) можно аппроксимировать с помощью *явной двухслойной разностной схемы*

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = a^2(x_m, t_n)\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + f(x_m, t_n),$$
$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, n = 0,1,2,\ldots \qquad (3)$$
$$u_m^0 = \varphi(x_m), \qquad \mathrm{m} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

На этой же сетке, пользуясь шаблоном

$$\begin{array}{ccccc} (\mathrm{m}-1, \mathrm{n}) & & (\mathrm{m}, \mathrm{n}) & & (\mathrm{m}+1, \mathrm{n}) \\ * & \text{------------} & * & \text{-----------} & \\ & & | & & \\ & & * & & \\ & & (\mathrm{m}, \mathrm{n}-1) & & \end{array}$$

задачу (1), (2) можно аппроксимировать с помощью *неявной двухслойной разностной схемы*

$$\frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\tau} = a^2(x_m, t_n)\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + f(x_m, t_n),$$
$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, n = 0,1,2,\ldots \qquad (4)$$
$$u_m^0 = \varphi(x_m), \qquad \mathrm{m} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Можно показать, что разностные схемы (3) и (4) аппроксимируют задачу коши (1), (2) на сетке

$$\bar{\omega}_{h,\tau} = \{(x_m, t_n): x_m = mh,\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots t_n = n\tau, \quad n = 0,1,\ldots, \}$$

с порядком $O(h^2 + \tau)$.

Как известно [1], решение явной двухслойной разностной схемы u_m^n сходится к решению $u(x_m, t_n)$ задачи Коши (1), (2) с порядком $O(h^2)$, если выполняется условие устойчивости

$$\tau \le \frac{h^2}{2\max a^2(x,t)}, \tag{5}$$

а решение u_m^n разностной схемы (4) сходится к решению $u(x_m, t_n)$ задачи Коши (1), (2) с порядком $O(h^2+\tau)$ при любом соотношении h и τ (см. [1]).

Для нахождения решения явной двухслойной разностной схемы (3) разрешим уравнение (3) относительно u_m^{n+1}. Имеем

$$\begin{aligned} &u_m^{n+1} = u_m^n + ra^2(x_m,t_n)\left(u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n\right) + \tau\cdot f(x_m,t_n),\\ &m = 0,\pm1,\pm2,.., \; N = 0,1,.2.., \end{aligned} \tag{6}$$

где $r = \dfrac{\tau}{h^2}$. При $n = 0$ правая часть равенства (6) известна, поэтому получаем

$$u_m^1 = u_m^0 + ra^2(x_m,t_0)\left(u_{m-1}^0 - 2u_m^0 + u_{m+1}^0\right) + \tau\cdot f(x_m,t_0),$$
$$m = 0,\pm1,\pm2,...$$

Далее, полагая в (6) n=1, получаем

$$u_m^2 = u_m^1 + ra^2(x_m,t_1)\left(u_{m-1}^1 - 2u_m^1 + u_{m+1}^1\right) + \tau\cdot f(x_m,t_1),$$
$$m = 0,\pm1,\pm2,...$$

и т.д. Зная решение u_m^n на $n-$ом временном слое, находим решение u_m^{n+1} на $(n+1)-$ом временном слое по формуле (6).

В случае неявной двухслойной разностной схемы (4) при $n=1$ получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно u_m^1

$$u_m^1 - u_m^0 - ra^2(x_m,t_1)\left(u_{m-1}^1 - 2u_m^1 + u_{m+1}^{1`}\right) - \tau\cdot f(x_m,t_1) = 0,$$
$$m = 0,\pm1,\pm2,...$$

которую можно решить методом прогонки, затем полагая $n = 2$, снова получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных u_m^2

$$u_m^2 - u_m^1 - ra^2(x_m,t_2)\left(u_{m-1}^2 - 2u_m^2 + u_{m+1}^{2`}\right) - \tau\cdot f(x_m,t_2) = 0,$$
$$m = 0,\pm1,\pm2,...$$

и т.д. Каждый раз, полученную систему, можно решить методом прогонки.

На практике задачу Коши (1),(2) приходится решать в некотором прямоугольнике $D = \{a < x < b, 0 < t < T\}$, где a, b, T - заданные числа. В лабораторном задании 1 и требуется решить задачу Коши в заданном прямоугольнике, пользуясь явной двухслойной разностной схемой (3). Это можно сделать следующим образом:

Пусть M - некоторое натуральное число, выберем его так, чтобы, например, $h = \dfrac{b-a}{M} \le 0.1$. Тогда в формуле (3) можно взять $x_m = a + mh, \quad m = 0,1,2,...,M$. Выберем шаг τ так, чтобы выполнялось условие устойчивости (5). Тогда $t_n = n\tau, \quad n = 0,1,2,...,N$, а натуральное число N выбрано так, чтобы $N\tau \le T < (N+1)\tau$.

Теперь вычисления u_m^n с помощью явной двухслойной разностной схемы (3) можно организовать следующим образом:

1. Полагая $n=0$, вычисляем $u_m^0=\varphi(x_m)$ для значений m от $-N$ до $M+N$;
2. Полагая в (6) $n=0$, вычисляем u_m^1 для значений m от $-N+1$ до $M+N-1$;
3. Полагая в (6) $n=1$, вычисляем u_m^2 для значений m от $-N+2$ до $M+N-2$;

- -
- -
- -

N. Полагая в (6) $n=N-1$, вычисляем u_m^N для значений m от 0 до M .

Далее, из полученных значений u_m^n выписываем значения $u_m^n \approx u(x_m,t_n)$, для $m=0,1,\ldots,M,\ n=0,1,\ldots,N$. С помощью полученных значений составляем таблицу вида:

Таблица значений решения задачи Коши

$t \setminus x$	a	$a+h$	$a+2h$	……………	b
0					
τ					
2τ					
. . .					
T					

Рассмотрим теперь смешанную граничную задачу для простейшего уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\ a<x<b,\ 0<t\le T,, \tag{7}$$

$$u(x,0)=\varphi(x).$$
$$u(a,t)=\alpha(t),\quad u(b,t)=\beta(t),\quad 0\le t\le T, \tag{8}$$

Здесь $a(x,t),\ f(x,t),\varphi(x),\alpha(t),\beta(t)$- заданные функции, $a(x,t)\ne 0$. Предположим, что эти функции таковы, что задача (7), (8) имеет единственное решение $u(x,t)$ и ограничены $\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|,\ \left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|$.

На сетке

$$\bar{\omega}_{h,\tau}=\{(x_m,t_n):x_m=a+mh,\ m=0,1,\ldots M,\ .t_n=n\tau,\quad n=0,1,\ldots N\ \},$$

где h и τ шаги по осям ox и ot соответственно, пользуясь шаблоном

$$(m, n+1)$$

$$*$$

$$|$$

$$(m-1, n) \;\text{---------}\; (m, n) \;\text{---------}\; (m+1, n)$$

задачу (7), (8) можно аппроксимировать с помощью явной двухслойной разностной схемы

$$\begin{aligned}
&\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}=a^2(x_m,t_n)\frac{u_{m+1}^n-2u_m^n+u_{m-1}^n}{h^2}+f(x_m,t_n),\\
&m=1,2\ldots M-1, \quad n=0,1,\ldots,N-1,\\
&u_m^0=\varphi(x_m), \qquad \mathrm{m}=0,1\ldots,\mathrm{M},\\
&u_0^{\mathrm{n}}=\alpha(\mathrm{t_n}), \quad u_M^n=\beta(\mathrm{t_n}), \quad n=0,1,\ldots,N.
\end{aligned} \tag{9}$$

Можно показать, что эта разностная схема аппроксимирует задачу (7), (8) с порядком $O(h^2+\tau)$. Если же выполняется условие (5), то, как известно [1], решение разностной схемы (9) сходится к решению задачи (7), (8) с порядком сходимости $O(h^2)$. Поэтому для достаточно малых значений h можно положить $u_m^n \approx u(x_m,t_n)$.

На этой же сетке, пользуясь шаблоном

$$(m-1, n) \;\text{------------}\; (m, n) \;\text{-----------}\; (m+1, n)$$

$$|$$

$$*$$

$$(m, n-1)$$

задачу (1),(2) можно аппроксимировать с помощью неявной двухслойной разностной схемы

$$\begin{aligned}
&\frac{u_m^{n}-u_m^{n-1}}{\tau}=a^2(x_m,t_n)\frac{u_{m+1}^n-2u_m^n+u_{m-1}^n}{h^2}+f(x_m,t_n),\\
&m=1,2,\ldots M-1, n=0,1,\ldots,N-1\\
&u_m^0=\varphi(x_m), \qquad \mathrm{m}=0,1,\ldots,\mathrm{M},\\
&u_0^n=\alpha(t_n), \quad u_M^n=\beta(t_n), \quad n=0,1,\ldots,N.
\end{aligned} \tag{10}$$

с порядком аппроксимации $O(h^2+\tau)$. Известно [1], что решение u_m^n этой разностной задачи сходится к решению $u(x_m,t_n)$ задачи (7), (8) с порядком сходимости $O(h^2+\tau)$ при любом соотношении шагов h и τ.

Рассмотрим, как организовать вычисления u_m^n по явной двухслойной разностной схеме (9). Предположим, что выбран шаг h, например, так, чтобы $h=\dfrac{b-a}{M}\le 0.1$, а шаг τ выберем так, чтобы выполнялось условие устойчивости (5). Тогда вычисления можно организовать следующим образом:

1. Вычисляем $u_m^0=\varphi(x_m)$ для значений m от 0 до M, вычисляем $u_0^n=\alpha(t_n)$ и $u_M^n=\beta(t_n)$ для значений n от 0 до N;
2. Полагая в (9) $n=0$, вычисляем u_m^1 для значений m от 1 до $M-1$;

3. Полагая в (9) $n=1$, вычисляем u_m^2 для значений m от 1 до $M-1$;

- -
- -
- -

N. Полагая в (9) $n=N-1$, вычисляем u_m^N для значений m от 1 до $M-1$.

С помощью полученных значений заполняем таблицу вида:

Таблица значений решения смешанной граничной задачи

$t \backslash x$	a	$a+0.2$	$a+0.4$	………………..	b
0				………………..	
0.1				………………..	
0.2				………………..	
. . . T				………………..	

Чтобы найти решение неявной разностной схемы (10) при каждом значении n от 1 до $N-1$ приходится решать систему линейных алгебраических уравнений, например, методом прогонки.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный. Вычислительные методы: Учебное пособие.- М.: Наука, 1976.,- Т.2., 303 с.

Лабораторная работа №2

Метод сеток решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона

Краткие теоретические сведения

1. Построение разностной схемы, аппроксимирующей задачу Дирихле для уравнения Пуассона.

Пусть в области $D = \{0 < x < a,\ 0 < y < b\}$ задано уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \tag{1}$$

и на границе Γ области $D -$ условию Дирихле

$$u_{!\Gamma} = \varphi(M), \tag{2}$$

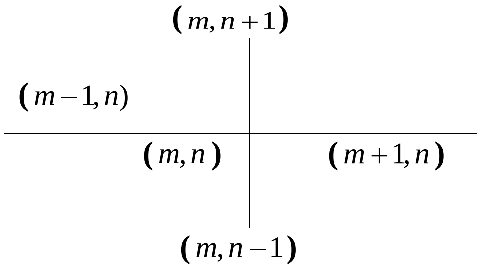
где f и $\varphi -$ известные функции, $M -$ точка контура Γ. Предположим, что функции f и φ таковы, что задача (1), (2) имеет единственное решение $u(x, y)$ в области $\overline{D} = D + \Gamma$ и это решение имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Возьмем прямоугольную сетку, положив

$$x_m = mh,\ \ m = 0,1,\Lambda\ ,M,\ \ h = \frac{a}{M};$$

$$y_m = nl,\ \ n = 0,1,\Lambda\ ,N,\ \ l = \frac{b}{N}.$$

Для аппроксимации уравнения (1) выберем пятиточечный шаблон



и к множеству D_h^0 внутренних узлов отнесем все узлы, лежащие в D, а к множеству граничных узлов Γ_h отнесем все узлы, лежащие на Γ.

Разностная схема, аппроксимирующая задачу (2), имеет вид (см. [1])

$$L_h(u^{(h)}) = f^{(h)}, \tag{3}$$

где

$$L_h(u^{(h)}) = \begin{cases} \dfrac{u_{m+1,n} - 2u_{mn} + u_{m-1,n}}{h^2} + \dfrac{u_{m,n+1} - 2u_{mn} + u_{m,n-1}}{l^2}, \\ m = 1,2,\ldots,M-1, \;\; n = 1,2,\ldots,N-1, \\ u_{mn}, \\ \{m = \overline{0,M}, n = 0;\; m = \overline{0,M},\, n = N;\; m = 0,\, n = \overline{0,N};\;\; m = M,\, n = \overline{0,N}\} \end{cases}$$

$$f^{(h)} = \begin{cases} f(x_m, y_n),\;\; m = \overline{1,M-1},\;\; n = \overline{1,N-1} \\ \varphi(x_m, y_n), \\ \{m = \overline{0,M}, n = 0;\; m = \overline{0,M},\, n = N;\; m = 0,\, n = \overline{0,N};\;\; m = M,\, n = \overline{0,N}\} \end{cases}$$

Разностная схема (3) представляет собой из $(M-1)(N-1)$ линейных алгебраических уравнений, столько же неизвестных, это— значения u_{mn} при $m = \overline{1,M-1},\;\; n = \overline{1,N-1}$.

Известно [1], то разностная схема (3) устойчива и аппроксимирует задачу Дирихле (1), (2) с порядком $O(h^2 + l^2)$. Поэтому по теореме о сходимости [1] решение u_{mn} разностной схемы (3) сходится к решению $u(x_m, y_n)$ задачи Дирихле (1), (2) при $h \to 0,\;\; l \to 0$ с тем же порядком.

2. Численные методы решения разностной схемы

Существуют различные методы решения системы разностных уравнений (3), например, метод Гаусса, итерационные методы, метод матричной прогонки, метод установления и др. Из них рассмотрим только метод матричной прогонки.

Метод матричной прогонки

Если $M >> N$ (M значительно больше N), то для применения метода матричной прогонки перепишем систему (3) в виде

$$\begin{cases} u_{m+1,n} - 2u_{mn} + u_{m-1,n} + \alpha(u_{m,n+1} - 2u_{mn} + u_{m,n-1}) = h^2 f(x_m, y_n), \\ m = 1,2,\ldots,M-1, \;\; n = 1,2,\ldots,N-1; \\ u_{0n} = \varphi(0, y_n),\; u_{Mn} = \varphi(a, y_n),\; n = 0,1,2,\ldots, \\ u_{m0} = \varphi(x_m, 0),\; u_{mN} = \varphi(x_m, b),\; m = 0,1,2,\ldots; \quad \alpha = (h/l)^2 > 0. \end{cases} \tag{4}$$

Введем обозначение

$$u_m = \begin{pmatrix} u_{m1} \\ u_{m2} \\ \vdots \\ u_{m,N-1} \end{pmatrix}, \quad m = 0,1,\ldots,M. \tag{5}$$

Положим в формулах (4) $n = 1,2,\ldots,N-1$ и, используя обозначение (5), запишем систему (4) в векторной форме

$$\begin{aligned} &u_{m+1} + Au_m + u_{m-1} = f_m, \quad m = 1,2,\ldots,M-1, \\ &u_0 = \varphi_0,\; u_M = \varphi_a, \end{aligned} \tag{6}$$

где A — трехдиагональная матрица порядка $N-1$ вида

$$A=\begin{pmatrix} -(2+2\alpha) & \alpha & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & -(2+2\alpha) & \alpha & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & & \alpha & -(2+2\alpha) & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \alpha & -(2+2\alpha) \end{pmatrix},$$

$$f_m=\begin{pmatrix} h^2 f_{m1}-\alpha\varphi(x_m,0) \\ h^2 f_{m2} \\ \vdots \\ h^2 f_{m,N-2} \\ h^2 f_{m,N-1}-\alpha\varphi(x_m,b) \end{pmatrix}, \quad \varphi_0=\begin{pmatrix} \varphi(0,y_1) \\ \varphi(0,y_2) \\ \vdots \\ \varphi(0,y_{N-1}) \end{pmatrix}, \quad \varphi_a=\begin{pmatrix} \varphi(a,y_1) \\ \varphi(a,y_2) \\ \vdots \\ \varphi(a,y_{N-1}) \end{pmatrix}.$$

Векторную систему (6) так же, как аналогичную скалярную систему можно решить методом прогонки, который в этом случае называется *методом матричной прогонки.* Алгоритм этого метода состоит из следующих шагов

1. По формуле

$$R_{v+1}=-\left(A+R_m\right)^{-1}, \quad m=1,2,\ldots,M-1,$$

полагая $R_1=0$, вычисляем матрицы $R_m=(R_{ij}^{(m)}), \quad m=1,2,\ldots,M, \quad i,j=1,2,\ldots,N-1,$ затем по формуле

$$s_{m+1}=R_{m+1}(s_m-f_m), \quad m=1,2,\ldots,M-1,$$

полагая $s_1=\varphi_0$, вычисляем векторы $s_m=\left(s_1^{(m)},s_2^{(m)},\ldots,s_{N-1}^{(m)}\right)^T$, $T-$знак транспонирования, $m=1,2,\ldots,M-1$.

2. По формуле

$$u_{m-1}=R_m u_m+s_m, \quad m=M,M-1,\ldots,2,$$

полагая $u_M=\varphi_a$, вычисляем искомые векторы $u_M, u_{M-1},\ldots,u_1,u_0=\varphi_0$.

Известно [1], что описанный здесь метод является устойчивым.

Мы рассмотрели метод матричной прогонки в случае $M>>N$. Если $N>>M$, то направление прогонки выбирается совпадающим с направлением оси oy, в обоих случаях сокращается объем вычислений.

<u>Задание.</u>

Методом сеток в прямоугольнике $D=\{0<x<a, 0<y<b\}$ с границей Г решить задачу Дирихле

$$\Delta u=f(x,y), \qquad (x,y)\in D,$$
$$u\big|_{\Gamma}=\varphi(x,y),$$

где $f(x,y), \varphi(x,y)-$заданные функции.

Для этой цели составить методом сеток разностную схему, аппроксимирующую данную задачу Дирихле с порядком погрешности $O(h^2+l^2)$, где h и $l-$шаги по оси ox и

oy соответственно. Найти решение составленной разностной схемы методом матричной прогонки.

Полученные приближенные значения решения выписать в точках (x_i, y_j)**, где**

$x_i = ih_0, y_j = jl_0, \qquad h_0 = \dfrac{a}{10}, l_0 = \dfrac{b}{10}$**. Заполнить соответствующую таблицу**

Решение задачи Дирихле методом матричной прогонки

y \ x	0.0	h_0	$2h_0$	…	a
0.0				…	
l_0				…	
$2l_0$				…	
…	…	…	…	…	…
b				…	

При заполнении таблиц в результатах сохранять по два десятичных знака. В расчетах взять $\max(h, l) \le 0.1$.

Для контроля работы составленных программ найти указанным методом приближенное решение, самостоятельно составленной тестовой задачи Дирихле того же вида, что и данная задача. Заполнить две таблицы приведенного выше вида, озаглавив их:

а) Таблица значений решения тестовой задачи методом матричной прогонки;

б) Таблица точных значений решения тестовой задачи.

Найти максимальную по модулю погрешность метода матричной прогонки для тестовой задачи и выписать ее в форме с плавающей точкой. Указать в какой точке это максимальное значение модуля погрешности достигается.

Сделать выводы.

К зачету необходимо представить выполненную без ошибок и оформленную по приведенному ниже образцу лабораторную работу. После этого выставляется зачет по представленной лабораторной работе, если студент

а) демонстрирует на компьютере полученные результаты, комментируя их;

б) показывает понимание численных методов, использованных в лабораторной работе;

в) демонстрирует четкое знание алгоритмов выполнения лабораторной работы;

г) умеет, пользуясь своей лабораторной работой, выполнить на ЭВМ за короткое время задания преподавателя, аналогичные заданиям лабораторной работы.

При реализации алгоритмов выполнения заданий можно пользоваться любым языком программирования или (и) пакетом прикладных программ.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ

	a	b	$f(x,y)$	$\varphi(x,y)$
1	**1**	**0.5**	$\dfrac{\sin(xy)}{1+x^2+y^2}$	$\int\limits_0^{x+y} e^{t^2}dt$
2	**0.5**	**1**	$-\sum\limits_{k=0}^{10}\dfrac{1+x+y}{1+x^k+y^k}$	$1+(x-y)^2$
3	**1**	**0.5**	$\dfrac{e^{\sin(x^2+y^2)}}{1+\int\limits_0^{xy}e^{t^2}dt}$	$x-y$
4	**0.2**	**0.5**	$\int\limits_0^{x^2+y^2}\dfrac{\sin^2 t}{1+t}dt$	0
5	**0.5**	**0.5**	$1-\sum\limits_{k=0}^{10}\dfrac{x^k+y^k}{1+x^k+y^k}$	$\dfrac{1-xy}{1+(x-y)^2}$
6	**1**	**0.5**	$\int\limits_0^{x}e^{-\frac{t+y}{t+1}}dt$	0
7	**0.5**	**0.5**	$\dfrac{e^{-x-y}-2}{1+\int\limits_0^{xy}\sin t^2 dt}$	$e^{xy-x^2-y^2}$
8	**0.8**	**0.5**	$xy+2\int\limits_0^1\dfrac{\sin t}{1+t^2}dt$	$e^{-\int\limits_0^{x+y}\frac{\sin t}{1+t}dt}$
9	**0.5**	**0.5**	$1+\int\limits_0^{xy}\dfrac{e^t}{1+t}dt-(x-y)^2$	$xy(x-y)$
10	**1**	**1**	$tg(\int\limits_0^{x+y}\sin^2 tdt)$	$\dfrac{x-y}{1+\sqrt{x+y+xy}}$
11	**1**	**0.5**	$\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{x+y+4}$	$\int\limits_0^{x^2+y^2}e^{\frac{1}{t+1}}dt$
12	**0.8**	**0.5**	$\alpha xy, где\ \alpha - корень$ $ур-я\quad e^{-x}=2x+5$	$xy\int\limits_0^1 e^{(x+y)t^2}dt$

13	1	0.4	$\sqrt[3]{x^2+xy+2y^2}$	$\alpha(x-1)(y-1)$, где $\alpha=\int_0^1 \frac{\cos t}{1+t}dt$
14	1	0.2	$\int_x^{1+y} e^{\frac{t}{1+t}}dt$	$xy(1-x)$
15	0.8	0.4	x^2+y^2-3	$\int_{xy}^{x+y+2} \frac{\sin t}{1+t}dt$
16	0.5	0.5	$\frac{x+1}{y+1}-e^{xy}$	$\int_{x+y}^{x^2+y^2} \frac{e^t}{1+\sin t}dt$
17	1	0.4	$\int_0^1 \frac{\sin(xyt^2)}{1+t(x+y)}dt$	$\alpha x(2y-1)$, где $\alpha=\int_0^1 \frac{\sin t^2}{1+t}dt$
18	1	0.5	x^2+y^2-xy-3	$\int_0^{xy} \cos\frac{t}{1+t}dt$
19	0.5	0.5	$x+y-\int_0^{xy} e^{\sin t}dt$	$\sqrt{1+\cos^2\pi x+\sin^2\pi y}$
20	1	0.5	$\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{x+y+4}$	$\int_0^{x^2+y^2} e^{\frac{1}{t+1}}dt$
21	1	0.5	$tg(1+\sqrt{x^2+y^2})$	$x\int_{x-y}^{x+y} \sin\frac{t}{t^2+1}dt$
22	1	0.8	$\frac{1-x-y}{1+\sqrt{x}+\sqrt{y}}$	$x\int_{x-y}^{x+y} \sin\frac{t}{e^t+1}dt$
23	0.4	0.4	$\sin\frac{x-y-xy}{1+x+y+xy}-1$	$x\int_0^1 e^{\frac{t}{1+t}}dt$
24	1	0.8	$\alpha-x-y-xy$, где $\alpha=\int_0^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t+2}dt$	$\int_0^{xy} e^{\frac{t}{1+t}}dt$
25	1	0.5	x^2+y^2-10	$\int_{xy}^{1+xy} e^{\frac{\sqrt{t}}{1+t}}dt$

Образец выполнения лабораторной работы

Студент 4 курса 3 гр. Магомедов М.М.

Вариант 0

<u>Тема</u>: Метод сеток решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения.
<u>Цель</u>: Научиться решать задачу Дирихле для эллиптического уравнения методом сеток, используя ЭВМ.

<u>Задание</u>

Методом сеток в прямоугольнике $D = \{0 < x < 0.5, 0 < y < 1.0\}$ с границей Γ решить задачу Дирихле

$$\Delta u = -\int_0^y \frac{\sin \pi x t}{1 + x^2 t^2} dt, \qquad (x, y) \in D, \qquad (0.1)$$
$$u\big|_\Gamma = 10(x - x^2)\cos \pi y$$

Для этой цели составить методом сеток разностную схему, аппроксимирующую данную задачу Дирихле с порядком погрешности $O(h^2 + l^2)$, где h и $l -$шаги по оси ox и oy соответственно. Найти решение составленной разностной схемы методом матричной прогонки.

Полученные приближенные значения решения выписать в точках (x_i, y_j), где $x_i = ih_0, y_j = jl_0$, $h_0 = \frac{0.5}{10} = 0.05$, $l_0 = \frac{1}{10} = 0.1$. **Заполнить соответствующую таблицу**

Решение задачи Дирихле методом матричной прогонки

y \ x	0.0	h_0	$2h_0$	…	0.5
0.0				…	
l_0				…	
$2l_0$				…	
…	…	…	…	…	…
1.5				…	

При заполнении таблиц в результатах сохранять по два десятичных знака. В расчетах взять $\max(h, l) \le 0.1$.

Для контроля работы составленных программ найти указанным методом приближенное решение, самостоятельно составленной тестовой задачи Дирихле того же вида, что и данная задача. Заполнить две таблицы приведенного выше вида, озаглавив их:

а) Таблица значений решения тестовой задачи методом матричной прогонки;

б) Таблица точных значений решения тестовой задачи.

Найти максимальную по модулю погрешность метода матричной прогонки для тестовой задачи и выписать ее в форме с плавающей точкой. Указать в какой точке это максимальное значение модуля погрешности достигается.

Сделать выводы.

Выполнение лабораторной работы

Правая часть уравнения содержит интеграл с переменным верхним пределом, первообразная которого не выражается конечным числом арифметических операций с элементарными функциями. Поэтому для его использования в программе опишем его как процедуру-функцию f, пользуясь численными методами интегрирования. Именно воспользуемся численным методом трапеции

$$\int_a^b g(x)dx \approx h\left(\frac{g(a)+g(b)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} g(a+ih)\right), \qquad h = \frac{b-a}{N}. \tag{0.2}$$

Порядок точности формулы (0.2) равен $O(h^2)$. Поэтому если возьмем $h = 0.01$, то точность будет порядка 10^{-4}. Можно было бы воспользоваться каким-нибудь пакетом прикладных программ. Тогда функция $f(x, y)$ получилась бы настолько сложной, что в дальнейшем ее использовать в программе было бы довольно трудно.

Решение задачи Дирихле методом матричной прогонки

Сначала составим разностную схему, аппроксимирующую задачу (0.1) с порядком $O(h^2 + l^2)$, где $h, l -$шаги по осям ox, oy соответственно. Она имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{u_{m+1,n} - 2u_{mn} + u_{m-1,n}}{h^2} + \dfrac{u_{m,n+1} - 2u_{mn} + u_{m,n-1}}{l^2} = f(x_m, y_n), \\ m = 1,2,\Lambda\ , M-1, \quad n = 1,2,\Lambda\ , N-1; \\ u_{mn} = \varphi(x_m, y_n), \\ \quad \{m = \overline{0,M}, n = 0;\ m = \overline{0,M},\ n = N;\ m = 0,\ n = \overline{0,N};\ m = M,\ n = \overline{0,N}, \end{cases} \tag{0.3}$$

где $x_m = mh, \quad y_n = nl, \quad f(x,y) = -\int_0^y \dfrac{\sin \pi x t}{1 + x^2 t^2} dt, \quad \varphi(x,y) = 10(x - x^2)\cos \pi y$. Это система $(M-1)(N-1)$ линейных алгебраических уравнений со столькими же неизвестными $u_{mn} \approx u(x_m, y_n), \quad m = 1,2,\Lambda\ , M-1, \quad n = 1,2,\Lambda\ , N-1.$

Решение u_{mn} системы разностных уравнений (0.3) найдем по приведенному в [1] алгоритму метода матричной прогонки. Пусть $M -$число разбиений отрезка [0,0.5] оси ox, $N -$ число разбиений отрезка [0,1] оси oy. Решим задачу (0.1) в случае $M >> N$. Это условие выполнится, если взять $h = 0.01, \quad l = 0.1$, тогда $M = \left[\dfrac{0.5}{0,01}\right] = 50, \quad N = \left[\dfrac{1}{0.1}\right] = 10$.

В методе матричной прогонки [1] система (0.3) сводится к следующей векторной системе относительно неизвестного вектора u_m

$$\begin{cases} u_{m+1} + Au_m + u_{m-1} = f_m, \quad m = 1,2,\Lambda\ , M-1, \\ u_0 = \varphi_0,\ u_M = \varphi_a, \end{cases} \tag{0.4}$$

где

$$u_m = \begin{pmatrix} u_{m1} \\ u_{m2} \\ \vdots \\ u_{m,N-1} \end{pmatrix}, \quad m = 0,1,\ldots,M,$$

$A-$трехдиагональная матрица порядка $N-1$ вида

$$A = \begin{pmatrix} -(2+2\alpha) & \alpha & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & -(2+2\alpha) & \alpha & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & & \alpha & -(2+2\alpha) & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \alpha & -(2+2\alpha) \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{h^2}{l^2},$$

$$f_m = \begin{pmatrix} h^2 f_{m1} - \alpha\varphi(x_m, 0) \\ h^2 f_{m2} \\ \vdots \\ h^2 f_{m,N-2} \\ h^2 f_{m,N-1} - \alpha\varphi(x_m, b) \end{pmatrix}, \qquad (0.5)$$

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} \varphi(0, y_1) \\ \varphi(0, y_2) \\ \vdots \\ \varphi(0, y_{N-1}) \end{pmatrix}, \quad \varphi_a = \begin{pmatrix} \varphi(a, y_1) \\ \varphi(a, y_2) \\ \vdots \\ \varphi(a, y_{N-1}) \end{pmatrix}.$$

Векторную систему (0.4) также как аналогичную скалярную систему можно решить методом прогонки, который в этом случае называется *методом матричной прогонки.* Алгоритм этого метода состоит из следующих шагов (см. [1])

3. По формуле

$$R_{m+1} = -(A + R_m)^{-1}, \quad m = 1,2,\ldots,M-1, \qquad (0.6)$$

полагая $R_1 = 0$, вычисляем матрицы

$R_m = (R_{ij}^{(m)}), \ \ m = 1,2,\ldots,M, \ \ i, j = 1,2,\ldots,N-1$, затем по формуле

$$s_{m+1} = R_{m+1}(s_m - f_m), \quad m = 1,2,\ldots,M-1, \qquad (0.7)$$

полагая $s_1 = \varphi_0$, вычисляем векторы $s_m = \left(s_1^{(m)}, s_2^{(m)}, \ldots, s_{N-1}^{(m)}\right)^T$, $T-$знак транспонирования, $m = 1,2,\ldots,M-1$.

4. По формуле

$$u_{m-1} = R_m u_m + s_m, \quad m = M, M-1, \ldots, 2, \qquad (0.8)$$

полагая $u_M = \varphi_a$, вычисляем искомые векторы $u_M, u_{M-1}, \ldots, u_1, u_0 = \varphi_0$.

Для вычисления обратной матрицы A^{-1} применим процедуру $Gauss(n, a, x, t)$ решения системы $Ax = b$. В этой процедуре $a-$расширенная матрица, т.е. матрица $A = (a_{ij}), \ i, j = 1,2,\ldots,n$ с добавлением $n+1-$го столбца из элементов вектора b,

$t=0$, если $\det A = 0$, $t=1$, если $\det A \neq 0$. Столбцы $x^{(i)}$ обратной матрицы находим как решения систем

$$Ax^{(i)} = e_i, \qquad i = 1,2,\ldots,n,$$

пользуясь процедурой $Gauss(n,a,x,t)$. Здесь $e_1 = (1,0,\ldots,0)^T$, $e_2 = (0,1,\ldots,0)^T, \ldots$, $e_n = (0,0,\ldots,1)^T$, $T -$ знак транспонирования.

При составлении программы решения задачи (0.1) методом матричной прогонки по приведенному выше алгоритму сначала составим процедуру, по которой вычисляются матрицы R_m и векторы s_m и f_m, пользуясь формулами (0.6), (0.7) и (0.5) соответственно. Затем, пользуясь формулой (0.8), вычисляем векторы $u_M, u_{M-1}, \ldots, u_1, u_0$.

Приведем программу реализации этого метода на языке программирования Турбо-Паскаль. Она снабжена краткими комментариями для облегчения понимания. Работа программы проверяется на примере тестовой задачи Дирихле

$$\Delta u = -10(4+\pi^2(x-2x^2))\sin \pi y, \quad (x,y)\in D$$
$$u|_\Gamma = 0,$$

с решением $u(x,y) = 10(x-2x^2)\sin \pi y$. Здесь D та же область, что и в задаче (0.1).

Программа
решения задачи Дирихле методом матричной прогонки

```
uses crt;
const n=9; {n=N-1}      m=50;
type  mas= array[1..n,1..n+1] of real;
      matr= array[1..n,1..n] of real;
      vec=array[1..n] of real;
      stb=set of byte;
var  x:vec;
     i,j,tt,k1,k,t:integer;
     ss,vv,h,l,al:real;
     r,c,s1,f1,fm,fi0,sm:vec;
     b,r1,r2,rm,a2,a:matr;
     max,i0,j0:real;
     u,ut:array[0..m,0..n+1] of real;
     aa:mas;
     s:stb;
procedure Gauss(n:integer;a:mas;var x:vec;var t:integer);
var k,m,i,j,j0:integer;
   l:array[1..21] of integer;
begin  t:=1;
s:=[];
for i:=1 to n do
begin
     max:=a[i,1]; j0:=1; for j:=1 to n do
    if abs(a[i,j])>abs(max)then
  begin
     max:=a[i,j]; j0:=j;
  end;
    l[i]:=j0;
    s:=s+[j0];
```

```
    if  max=0 then  t:=0 else
  begin
     for k:=1 to n do if k<>i then
     for m:=1 to n+1 do if not (m in s)
     then a[k,m]:=(a[k,m]*a[i,j0]-a[i,m]*a[k,j0])/max;
     for m:=1 to n+1 do if not (m in s)
     then a[i,m]:=a[i,m]/max;for k:=1 to n do a[k,j0]:=0;a[i,j0]:=1;
  end;
end;
for k:=1 to n do begin
i:=l[k];
x[i]:=a[k,n+1]; end;
end;
   procedure  obrm(n:integer;a:matr; var a0:matr;var z:integer);
   var x:vec;
       i,j,k,m,z1:integer;
       aa:mas;
  begin
    for i:=1 to n do
    for j:=1 to n do
    aa[i,j]:=a[i,j];
    for i:=1 to n do
  begin
        for j:=1 to n do if j=i then aa[j,n+1]:=1 else aa[j,n+1]:=0;
        gauss(n,aa,x,t);
        if t=1 then
        begin z:=1;
        for j:=1 to n do a0[j,i]:=x[j];
        for k:=1 to n do
        for m:=1 to n do
        aa[k,m]:=a[k,m];
        end else  z:=0
  end;
 end;
 function rr(x,t:real):real; {подынтегральная функция}
 begin
 rr:=sin(pi*x*t)/(1+sqr(x*t));
 end;
function f(x,y:real):real; {правая часть уравнения}
var
h,s:real;
i,k:integer;
begin
h:=0.01;
k:=round(100*y);
s:=(rr(x,0)+rr(x,y))/2;
for i:=1 to k-1 do
s:=s+rr(x,i*h);
f:=h*s;    {f:=-10*(4+pi*pi*(x-2*x*x))*sin(pi*y) – правая часть уравнения тестовой задачи}
end;
       function fi(x,y:real):real;{граничная функция}
       begin
```

```
     fi:= 10*(x-x*x)*sin(pi*y); {fi:=0— граничная функция тестовой задачи };
     end;
     procedure rmsm(m:integer; a:matr;fi0:vec;  var rm:matr; var sm,fm:vec);
 {вычисляет  rm,fm,sm}
{ В эой процедуре r1,s1,f1 -m-е векторы,rm,sm,fm-(m+1)-е векторы}
   var h,l,al:real; i,j,k:integer;
  begin k:=1;
     h:=0.01; l:=0.1; al:=0.01;
    for i:=1 to n do
    for j:=1 to n do
    r1[i,j]:=0; {R1=0} s1:=fi0;
    {формируется вектор fm pri m=1}
    for j:=1 to n do
    if j=1 then f1[j]:=h*h*f(h,j*l)-al*fi(h,0)
    else if j=n then f1[j]:=h*h*f(h,j*l)-al*fi(h,1)
    else f1[j]:=h*h*f(h,j*l);
    {вектор fm сформирован}
   if m=1 then
 begin
    rm:=r1; {R1=0} sm:=s1; fm:=f1;
 end
 else
 begin
    repeat k:=k+1;
    for i:=1 to n do
    for j:=1 to n do
     a2[i,j]:=a[i,j]+r1[i,j];
    obrm(n,a2,b,t);  {образована матрица обратная A+Rm}
    for i:=1 to n do
    for j:=1 to n do
    rm[i,j]:=-b[i,j]; {это матрица Rm+1}
         {формируется вектор fm при m=k>1}
       for j:=1 to n do
    if j=1 then fm[j]:=h*h*f(k*h,j*l)-al*fi(k*h,0)
    else if j=n then fm[j]:=h*h*f(k*h,j*l)-al*fi(k*h,1)
    else fm[j]:=h*h*f(k*h,j*l);
      {вектор fm сформирован}
    {вычисляется вектор sm по формуле (0,7)}
    for i:=1 to n do
    begin
     ss:=0;
    for j:=1 to n do
    ss:=ss+r1[i,j]*(s1[j]-f1[j]);
    sm[i]:=ss;
    end;
    { вектор sm вычислен}
    s1:=sm; f1:=fm;r1:=rm;
    until k=m;
end;
end;{конец процедуры}
   begin clrscr; {Начало основной программы}
    h:=0.01; l:=0.1; al:=0.01;
```

```
 {формируется матрица A}
 for i:=1 to n do a[i,i]:=-2-2*al;
 for i:=1 to n do
 for j:=1 to n do
 if abs(i-j)=1 then
 a[i,j]:=al else if i<>j then
 a[i,i]:=-2-2*al;
 { матрица A сформирована}
 for j:=1 to n do fi0[j]:=fi(0,j*l); {вектор fi0}
 for j:=0 to n do u[0,j]:=fi(0,j*l);  {вектор u0}
 for j:=0 to n do u[m,j]:=fi(0.5,j*l);  {вектор uM}
  for i:=0 to m-1 do
 begin
   u[i,0]:=fi(i*h,0);
   u[i,n+1]:=fi(i*h,1);
 end;
 for i:=m downto 2 do
 begin rmsm(i,a,fi0,rm,sm,fm); {вычисление векторов  rm,fm,sm при i=m}
 {вычисление  ui при i=m}
 for j:=1 to n do
 begin
   vv:=0;
   for k:=1 to n do
   vv:=vv+rm[j,k]*u[i,k];
   u[i-1,j]:=vv+sm[j];
 end; {конец вычислений векторов  ui при i=m}
end;  { конец вычислений векторов  ui для i от M до нуля назад}
{вывод на экран решения}
 writeln;  writeln;
 write( ' |y\x|');
 for i:=0 to m do
 if i mod 5=0 then write(h*i:5:2,'|');writeln;
 writeln('  ----------------------------------------------------------------- ');
 for j:=0 to n+1 do
begin
 for i:=0 to m do
 if i mod 5=0 then write(u[i,j]:5:2,'|'); writeln
end;
 readkey; {конец вывода на экран решения }
 for i:=0 to m do
 for j:=0 to n+1 do
 ut[i,j]:=10*(i*h-2*sqr(i*h))*sin(pi*j*l);
 writeln;  writeln;
 writeln('             точное решение тестовой задачи');
 write( ' |y\x|');
 for i:=0 to m do
 if i mod 5=0 then write(h*i:5:2,'|');writeln;
 writeln('  -----------------------------------------------------------------');
 for j:=0 to n+1 do
begin
 for i:=0 to m do
 if i mod 5=0 then write(ut[i,j]:5:2,'|'); writeln
```

```
 end;
  readkey; { конец вывода на экран точного решения }
  max:=abs(u[0,0]-ut[0,0]);
     for i:=0 to m do
     for j:=0 to n+1 do
     if  abs(u[i,j]-ut[i,j])>max then begin i0:=i;j0:=j;
     max:= abs(u[i,j]-ut[i,j]) end;
    writeln(максимальная погрешность =', max:8,
    ' и достигается при x=',i0*h:5:2, '  y=',j0*l:5:2); readkey;
end.
```

По этой программе получены следующие результаты для тестовой задачи

Решение тестовой задачи методом матричной прогонки

y\x	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.1	0.00	0.13	0.24	0.32	0.36	0.38	0.36	0.32	0.24	0.14	0.00
0.2	0.00	0.25	0.45	0.60	0.69	0.72	0.69	0.61	0.46	0.26	0.00
0.3	0.00	0.35	0.62	0.83	0.95	0.99	0.95	0.84	0.64	0.36	0.00
0.4	0.00	0.41	0.73	0.97	1.11	1.16	1.12	0.98	0.75	0.42	0.00
0.5	0.00	0.43	0.77	1.02	1.17	1.22	1.18	1.03	0.79	0.44	0.00
0.6	0.00	0.41	0.73	0.97	1.11	1.16	1.12	0.98	0.75	0.42	0.00
0.7	0.00	0.35	0.62	0.83	0.95	0.99	0.95	0.84	0.64	0.36	0.00
0.8	0.00	0.25	0.45	0.60	0.69	0.72	0.69	0.61	0.46	0.26	0.00
0.9	0.00	0.13	0.24	0.32	0.36	0.38	0.36	0.32	0.24	0.14	0.00
1.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Точное решение тестовой задачи

y\x	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.1	0.00	0.14	0.25	0.32	0.37	0.39	0.37	0.32	0.25	0.14	0.00
0.2	0.00	0.26	0.47	0.62	0.71	0.73	0.71	0.62	0.47	0.26	0.00
0.3	0.00	0.36	0.65	0.85	0.97	1.01	0.97	0.85	0.65	0.36	0.00
0.4	0.00	0.43	0.76	1.00	1.14	1.19	1.14	1.00	0.76	0.43	0.00
0.5	0.00	0.45	0.80	1.05	1.20	1.25	1.20	1.05	0.80	0.45	0.00
0.6	0.00	0.43	0.76	1.00	1.14	1.19	1.14	1.00	0.76	0.43	0.00
0.7	0.00	0.36	0.65	0.85	0.97	1.01	0.97	0.85	0.65	0.36	0.00
0.8	0.00	0.26	0.47	0.62	0.71	0.73	0.71	0.62	0.47	0.26	0.00
0.9	0.00	0.14	0.25	0.32	0.37	0.39	0.37	0.32	0.25	0.14	0.00
1.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Максимальная по модулю погрешность равна $3.0 \cdot 10^{-2}$ и достигается в точке (0.15,0.50). . Мы также проверили работу составленной программы на других тестовых задачах. При этом максимальная по модулю погрешность не превосходила $5 \cdot 10^{-2}$.
Эту погрешность можно уменьшить, если уменьшить шаги h и l по координатным осям. Зато увеличится объем вычислений, соответственно время счета. Поэтому сильно уменьшать шаги h и l невыгодно.

По этой же программе получены следующие значения решения задачи (0.1)

Таблица значений решения задачи Дирихле (0.1)
методом матричной прогонки

y\x	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.1	0.00	0.05	0.11	0.16	0.23	0.29	0.37	0.45	0.54	0.65	0.77
0.2	0.00	0.10	0.20	0.31	0.43	0.56	0.70	0.85	1.03	1.24	1.47
0.3	0.00	0.14	0.28	0.43	0.59	0.76	0.96	1.17	1.42	1.70	2.02
0.4	0.00	0.16	0.33	0.50	0.69	0.90	1.12	1.38	1.67	2.00	2.38
0.5	0.00	0.17	0.35	0.53	0.73	0.94	1.18	1.45	1.75	2.10	2.50
0.6	0.00	0.16	0.33	0.50	0.69	0.90	1.12	1.38	1.67	2.00	2.38
0.7	0.00	0.14	0.28	0.43	0.59	0.76	0.95	1.17	1.42	1.70	2.02
0.8	0.00	0.10	0.20	0.31	0.43	0.55	0.69	0.85	1.03	1.23	1.47
0.9	0.00	0.05	0.11	0.16	0.22	0.29	0.36	0.45	0.54	0.65	0.77
1.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Выводы

1. Полученное решение положительно в прямоугольнике D.
2. Максимальное значение решения равно 2.50 и достигается в точке (0.5; 0.5) границы Γ прямоугольника D, а минимальное значение решения равно 0 и достигается на левой боковой, нижней и верхней границах прямоугольника D.
3. Уменьшение шагов h и l приводит к увеличению точности решения задачи Дирихле, зато резко возрастает время счета. Поэтому сильно уменьшать шаги h и l невыгодно.

Литература

1. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы, т.2, Москва, 1977, 340 с.