МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Физический факультет

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по дисциплине
«Численные методы решения алгебраических и дифференциальных уравнений»

Кафедра прикладной математики
факультета математики и компьютерных наук

Образовательная программа бакалавриата:

13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

Направленность (профиль) программы:
Возобновляемые источники энергии и гидроэлектростанции

Форма обучения:
очная

Статус дисциплины:
входит в обязательную часть ОПОП

Махачкала, 2022

Фонд оценочных средств по дисциплине «Численные методы решения алгебраических и дифференциальных уравнений» составлен в 2022 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО бакалавриата по направлению подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника от 28 февраля 2018 г. N 144

Разработчики:
кафедра прикладной математики, Лугуева А.С. к.ф.-м. н., доцент

Фонд оценочных средств по дисциплине «Численные методы решения алгебраических и дифференциальных уравнений» одобрен:
на заседании кафедры Прикладной математики
от 25.02.2022 г., протокол № 6

Зав. кафедрой ____________ Кадиев Р.И.

на заседании Методической комиссии факультета МиКН от
от 24 марта 2022 г., протокол № 4
Председатель____________Ризаев М.К.

Фонд оценочных средств «Численные методы решения алгебраических и дифференциальных уравнений» согласован с учебно-методическим управлением

«31» марта 2022 г. ________________________

Рецензент (эксперт):

Зав. кафедрой математического анализа ФМиКН, д.ф.-м.н, ________ Рамазанов А.К

1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине

«Численные методы решения алгебраических и дифференциальных уравнений»

1.1. Основные сведения о дисциплине

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетные единицы (72 академических часов).

Очная форма обучения

Вид работы	Трудоемкость, академических часов		
	4 семестр		всего
Общая трудоёмкость	72		72
Контактная работа:	32		32
Лекции (Л)	16		16
Практические занятия (ПЗ)	16		16
Лабораторные занятия (ЛЗ)			
Консультации			
Промежуточная аттестация (зачет, экзамен)	***зачет***		
Самостоятельная работа	40		40
1. работа с лекционным материалом, с учебной литературой	6		6
2. опережающая самостоятельная работа (изучение нового материала до его изложения на занятиях)	4		4
3. выполнение домашних заданий	6		6
4. подготовка к лабораторным работам, к практическим занятиям	6		6
5. подготовка к коллоквиуму	6		6
6. подготовка к контрольным работам	6		6
7. подготовка к рубежному контролю	6		6

1.2. Требования к результатам обучения по дисциплине, формы ихконтроля и виды оценочных средств

ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

*по дисциплине «*Численные методы решения алгебраических и дифференциальных уравнений*»*

№ п/п	Контролируемые модули, разделы (темы) дисциплины	Код контролируемой компетенции (или её части)	Оценочные средства		Способ контроля
			наименование	№№ заданий	
1	**МОДУЛЬ 1** Численные методы алгебры.	УК-1, ОПК-1, ОПК-3	Вопросы для собеседования	1-9	устно
		УК-1, ОПК-1, ОПК-3	Контрольные работы	1	письменно
		УК-1, ОПК-1, ОПК-3	Тестовые задания	1-20	письменно
2	**МОДУЛЬ 2:**	УК-1, ОПК-1,	Вопросы для	10-12	устно

	Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений	ОПК-3	собеседования		
		УК-1, ОПК-1, ОПК-3	Контрольные работы	2	письменно
		УК-1, ОПК-1, ОПК-3	Тестовые задания	21-31	письменно

1.3. Показатели и критерии определения уровня сформированности компетенций

№ п/п	Код компетенции	Уровни сформированности компетенции			
		Недостаточный	Удовлетворительный (достаточный)	Базовый	Повышенный
		Отсутствие признаков удовлетворительного уровня	Знать: Уметь: Владеть:	Знать: Уметь: Владеть:	Знать: Уметь: Владеть:
1	**УК-1**	*Не знает на достаточном уровне*: основные принципы и методы критического анализа. *Не умеет на достаточном уровне*: получать новые знания на основе анализа, синтеза; применять логические формы и процедуры; реконструировать и анализировать план построения собственной или чужой мысли; выделять его состав и структуру; *Не владеет на достаточном уровне:* способностью исследовать проблемы, связанныес профессиональной деятельностью, с	*Знает на достаточном уровне*: основные принципы и методы критического анализа. *Умеет на достаточном уровне*: получать новые знания на основе анализа, синтеза; применять логические формы и процедуры; реконструировать и анализировать план построения собственной или чужой мысли; выделять его состав и структуру; *Владеет на достаточном уровне:* способностью исследовать проблемы, связанныес профессиональной	*Знает на хорошем уровне*: основные принципы и методы критического анализа. *Умеет на хорошем уровне*: получать новые знания на основе анализа, синтеза; применять логические формы и процедуры; реконструировать и анализировать план построения собственной или чужой мысли; выделять его состав и структуру; *Владеет на хорошем уровне:* способностью исследовать проблемы, связанныес профессиональной	*Знает в совершенств*: основные принципы и методы критического анализа. *Умеет в совершенстве* получать новые знания на основе анализа, синтеза; применять логические формы и процедуры; реконструировать и анализировать план построения собственной или чужой мысли; выделять его состав и структуру; *Владеет в совершенстве* способностью исследовать проблемы, связанныес профессиональной

		применением анализа, синтеза и других методов интеллектуальной деятельности; сознательно планировать, регулировать и контролировать свое мышление; способностью оценивать логическую правильность мыслей; готовностью применять системный подход при принятии решений в профессиональной деятельности.	деятельностью, с применением анализа, синтеза и других методов интеллектуальной деятельности; сознательно планировать, регулировать и контролировать свое мышление; способностью оценивать логическую правильность мыслей; готовностью применять системный подход при принятии решений в профессиональной деятельности.	деятельностью, с применением анализа, синтеза и других методов интеллектуальной деятельности; сознательно планировать, регулировать и контролировать свое мышление; способностью оценивать логическую правильность мыслей; готовностью применять системный подход при принятии решений в профессиональной деятельности.	деятельностью, с применением анализа, синтеза и других методов интеллектуальной деятельности; сознательно планировать, регулировать и контролировать свое мышление; способностью оценивать логическую правильность мыслей; готовностью применять системный подход при принятии решений в профессиональной деятельности.
	УК-2	*Не знает на достаточном уровне:* возможные способы решения профессиональных задач, методы верификации, интерпретации и представления результатов исследований, основные методы статистической обработки результатов исследований *Не умеет на достаточном уровне*:	*Знает на достаточном уровне:* возможные способы решения профессиональных задач, методы верификации, интерпретации и представления результатов исследований, основные методы статистической обработки результатов исследований	*Знает на хорошем уровне:* возможные способы решения профессиональных задач, методы верификации, интерпретации и представления результатов исследований, основные методы статистической обработки результатов исследований	*Знает в совершенстве* возможные способы решения профессиональных задач, методы верификации, интерпретации и представления результатов исследований, основные методы статистической обработки результатов исследований *Умеет в*

		оценивать вероятные риски и ограничения, связанные с решением поставленных задач и определять вероятные результаты; применять известные методы решения систем линейных алгебраических уравнений на практике; использовать дифференциальные уравнения в построении моделей биологических процессов *Не владеет на достаточном уровне*: методами достижения результатов решения поставленных задач, различными способами представления результатов; методами решения систем линейных алгебраических уравнений на практике; использовать дифференциальные уравнения в построении моделей биологических процессов.	*Умеет на достаточном уровне*: оценивать вероятные риски и ограничения, связанные с решением поставленных задач и определять вероятные результаты; применять известные методы решения систем линейных алгебраических уравнений на практике; использовать дифференциальные уравнения в построении моделей биологических процессов *Владеет на достаточном уровне*: методами достижения результатов решения поставленных задач, различными способами представления результатов; методами решения систем линейных алгебраических уравнений на практике; использовать дифференциальные уравнения в	*Умеет на хорошем уровне*: оценивать вероятные риски и ограничения, связанные с решением поставленных задач и определять вероятные результаты; применять известные методы решения систем линейных алгебраических уравнений на практике; использовать дифференциальные уравнения в построении моделей биологических процессов *Владеет на хорошем уровне*: методами достижения результатов решения поставленных задач, различными способами представления результатов; методами решения систем линейных алгебраических уравнений на практике; использовать дифференциальные уравнения в	*совершенств*: оценивать вероятные риски и ограничения, связанные с решением поставленных задач и определять вероятные результаты; применять известные методы решения систем линейных алгебраических уравнений на практике; использовать дифференциальные уравнения в построении моделей биологических процессов *Владеет в совершенстве* методами достижения результатов решения поставленных задач, различными способами представления результатов; методами решения систем линейных алгебраических уравнений на практике; использовать дифференциальные уравнения в построении

			построении моделей биологических процессов.	построении моделей биологических процессов.	моделей биологических процессов.

2. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И ИНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ОЦЕНКИ знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения дисциплины «Численные методы решения алгебраических и дифференциальных уравнений»

Контрольные работы

Контрольная работа 1

1. Найти второе приближение к решению системы:

$$\begin{cases} x_1 = 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + 1, \\ x_2 = 0.1x_1 - 0.2x_3 - 1, \\ x_3 = 0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3 + 2 \end{cases}$$

методом простой итерации, взяв вектор $x^0 = (0;0;0)$ за начальное приближение.

2. Найти $E + A + A^2 + \dots$, если $A = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.25 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix}$.

3. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & -a \\ \frac{a}{2} & a \end{pmatrix}$. Найти все значения a, при которых ряд $E + A + A^2 + \dots$ сходится.

4. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ a & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Решить неравенство $\|A\|_2 \le 6$

Контрольная работа 2

1. Найти приближенное решение $y(x)$ задачи Коши

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{x^2+1} - (x-1)^2, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

на отрезке [0;0,4], разлагая $y(x)$ в ряд Тейлора с четырьмя членами разложения. Найти

$$\max_{0 \le x \le 0,4} \left| y(x) - x^2 - 1 \right|.$$

2. Методом Эйлера с шагом $h = 0,1$ найти приближенно $y(0,3)$, где $y(x)$ – решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = x(y-x)^2 - x^3 + 2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

3. Описать как найти $y(0,5)$, используя явную формулу Адамса

$$y_{n+1} = y_n + h\frac{3f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1})}{2}$$

с шагом $h = 0,1$, как затем уточнить это значение, используя неявную формулу Адамса.
4. Привести вывод явной двухшаговой формулы Адамса.

Критерии оценки:

- оценка «отлично» выставляется студенту, если верно и правильно выполнено 90%-100% заданий;
- оценка «хорошо» выставляется студенту, если верно и правильно выполнено 70%-80% заданий;
- оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если верно и правильно решено 50%-60% заданий, возможны некоторые исправления при решении;
- оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если верно выполнено менее 50% заданий;

Вопросы для коллоквиумов, собеседования

МОДУЛЬ 1: Численные методы алгебры.

Задание 1

1. Отделить один из действительных корней нелинейного алгебраического уравнения $x^3 + 3x - 1 = 0$.
2. Найти первое приближение одного из корней нелинейного уравнения $x^3 + 3x - 2 = 0$ методом Ньютона, выбрав нулевое приближение x_0 из условия $f(x_0) f^{//}(x_0) > 0$.
3. Показать, что итерационный процесс $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ для приведенного нелинейного уравнения $x = 1 - \frac{1}{5}x^4$ на отрезке $[0;1]$ сходится при $x_0 \in [0;1]$.
4. Найти $\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_3$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
5. Найти первое приближение к решению системы: $\begin{cases} x_1 = 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + 1, \\ x_2 = 0.1x_1 - 0.2x_3 - 1, \\ x_3 = 0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3 + 2 \end{cases}$

   методом простой итерации, взяв вектор $x^0 = (1;-1;2)$ за начальное приближение.
6. Отделить один из действительных корней нелинейного алгебраического уравнения $x^3 + x - 1 = 0$.

7. Найти первое приближение одного из корней нелинейного уравнения $x^3 + 2x - 2 = 0$ методом Ньютона, выбрав нулевое приближение x_0 из условия $f(x_0)\, f^{//}(x_0) > 0$.
8. Показать, что итерационный процесс $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ для приведенного нелинейного уравнения $x = 1 - \frac{1}{7}x^4$ на отрезке $[0;1]$ сходится при $x_0 \in [0;1]$.
9. Найти $\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_3$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

***Модуль 2.* Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.**

Задание 2

10. Найти приближенное решение $y(x)$ задачи Коши

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{x^2+1} - (x-1)^2, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

на отрезке [0;0,4], разлагая $y(x)$ в ряд Тейлора с четырьмя членами разложения. Найти

$$\max_{0 \le x \le 0,4} \left| y(x) - x^2 - 1 \right|.$$

11. Найти первое приближение к решению системы:

$$\begin{cases} x_1 = 0.1x_1 + 0.2x_2 - 0.3x_3 + 1, \\ x_2 = 0.1x_1 + 0.2x_3 - 1, \\ x_3 = 0.2x_1 - 0.2x_2 + 0.2x_3 + 2 \end{cases}$$

методом простой итерации, взяв вектор $x^0 = (1;-1;2)$ за начальное приближение.

12. Методом Эйлера с шагом $h = 0{,}1$ найти приближенно $y(0{,}3)$, где $y(x) -$ решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = x(y-x)^2 - x^3 + 2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Критерии оценки:

- оценка «отлично» выставляется студенту, если изложение полученных знаний в устной форме полное, в системе, в соответствии с требованиями учебной программы; допускаются единичные несущественные ошибки, самостоятельно исправляемые учащимися;
- оценка «хорошо» выставляется студенту, если изложение полученных знаний в устной форме полное, в системе, в соответствии с требованиями учебной программы; допускаются, отдельные несущественные ошибки, исправляемые учащимися после указания преподавателя на них;

- оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если изложение полученных знаний неполное, однако это не препятствует усвоению последующего программного материала; допускаются отдельные существенные ошибки, исправляемые с помощью преподавателя;
- оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если изложение учебного материала неполное, бессистемное, что препятствует усвоению последующей учебной информации; существенные ошибки, не исправляемые даже с помощью преподавателя;

Комплект тестовых заданий для контроля

. Пусть a =61.24024$\pm$ 0.0012. Указать все верные значения в широком смысле цифры числа a :

1) все цифры верные;
2) нет верных цифр в этом числе;
3) все цифры после запятой;
4) 61.2402;
5) 61.240.

2. Пусть a =0.040081. Значащими цифрами числа a являются:
   1) все его цифры;
   2) 81;
   3) 040081;
   4) 40081;
   5) нет значащих чисел.
3. Найти абсолютную погрешность приближенного числа a =24279 по его относительной погрешности $\delta = 0.1\%$:
   1) $0.24*10^2$;
   2) 0.79;
   3) 2.79;
   4) 7.9;
   5) 2.428.
4. Найти абсолютную погрешность приближенного числа a =0.896 по его относительной погрешности $\delta = 10\%$:
   1) 0.6;
   2) 0.1;
   3) 0.06;
   4) $0.9*10^{-1}$;
   5) $0.8*10^{-1}$.
5. Найти относительную погрешность в % числа a =0.4032$\pm$ 0.0008:
   1) 0.2 %;
   2) 2 %;
   3) 0.32 %;
   4) 3 %;
   5) 0.8 %.
6. Пусть $a = 0.03004 \pm 0.00013$. Указать все верные (в широком смысле) значащие цифры числа a :
   1) 03004;
   2) 0.03004;
   3) 3004;
   4) 300;
   5) 30.
7. Пусть a =681$\pm$ 0.6. Указать все верные (в широком смысле) значащие цифры числа a :
   1) 68;
   2) 681;
   3) 81;
   4) 1;

5) нет верных значащих цифр.

8. Округляя до четырех значащих цифр число 0.0020068, определить абсолютную погрешность полученного приближенного числа:

1) $2*10^{-7}$;
2) $6*10^{-6}$;
3) $7*10^{-6}$;
4) $6*10^{-5}$;
5) $9*10^{-7}$.

9. Найти абсолютную погрешность приближенного числа a=0.896 по его относительной погрешности $\delta = 10\%$:

6) 0.6;
7) 0.1;
8) 0.06;
9) $0.9*10^{-1}$;
10) $0.8*10^{-1}$.

10. Округляя до трех значащих цифр число 0.01204, определить абсолютную погрешность полученного приближенного числа:

1) 0.04;
2) 0.002;
3) 0.001;
4) $0.2*10^{-4}$;
5) $0.4*10^{-4}$.

11. Интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $f(x)$, построенный по ее значениям в узлах $x_0, x_1, \ldots, x_n$, имеет вид:

1) $\sum_{i=0}^{n} f(x_j) \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$;

2) $\sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_j - x_i}$;

3) $\sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$;

4) $\sum_{i=0}^{n} f(x_j) \prod_{j \neq i} \frac{x - x_i}{x_i - x_j}$;

5) $\sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$.

12.

Модуль 2. Численные методы решения нелинейных алгебраических уравнений. Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Численные методы решения дифференциальных уравнений

1.Метод Ньютона применяется к нахождению приближенного решения уравнения $f(x) \equiv x^2 - 2 = 0$, взяв за начальное приближение $x_0 = 1$. Найти второе приближение x_2 к решению этого уравнения и невязку $r = f(x_2)$.

1) $x_2 = \frac{17}{12}, r = \frac{1}{144}$; 2) $x_2 = \frac{7}{4}, r = \frac{3}{64}$; 3) $x_2 = \frac{3}{2}, r = \frac{1}{4}$;

4) $x_2 = \frac{280}{209}, r = \frac{7}{209}$; 5) $x_2 = \frac{7}{3}, r = \frac{1}{81}$.

2. Метод Ньютона применяется к нахождению приближенного решения уравнения

$f(x) \equiv x^3 - 2 = 0$, взяв за начальное приближение $x_0 = 1$. Найти второе приближение x_2 к решению этого уравнения.

1) $\frac{81}{64}$; 2) $\frac{61}{48}$; 3) $\frac{91}{72}$; 4) $\frac{56}{39}$; 5) $\frac{101}{85}$.

3. Найти третье приближение к решению уравнения $x^3 + x - 3 = 0$ на отрезке [1;2] методом половинного деления.

1) $\frac{9}{7}$; 2) $\frac{9}{8}$; 3) $\frac{5}{4}$; 4) $\frac{6}{5}$; 5) $\frac{7}{6}$.

4. Найти второе приближение к решению уравнения $x^4 + x - 3 = 0$ на отрезке [1;2] методом половинного деления.

1) $\frac{5}{4}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{7}{4}$; 4) $\frac{4}{3}$; 5) $\frac{9}{8}$.

5. Найти все положительные значения a такие, что третье приближение к решению уравнения $x^2 + x = a$ на отрезке [0;1] методом половинного деления равна $\frac{3}{8}$.

1) $a \in (\frac{1}{3};1)$; 2) $a \in (\frac{1}{4};\frac{3}{4})$; 3) $a \in (1,+\infty)$;

4) $a \in (\frac{5}{16};\frac{3}{4})$; 5) $a \in (\frac{5}{12};\frac{5}{6})$.

6. Метод Ньютона применяется к нахождению приближенного решения уравнения $f(x) \equiv x^2 + 2x - 1 = 0$, взяв за начальное приближение $x_0 = 0$. Найти второе приближение x_2 к решению и невязку $r = f(x_2)$.

1) $x_2 = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{4}$; 2) $x_2 = \frac{2}{3}, r = \frac{7}{9}$; 3) $x_2 = \frac{7}{15}, r = \frac{34}{225}$;

4) $x_2 = \frac{5}{12}, r = \frac{1}{144}$; 5) $x_2 = \frac{2}{5}, r = -\frac{1}{25}$.

7. Метод Ньютона применяется к решению уравнения $f(x) \equiv x^3 + x - 3 = 0$, взяв за начальное приближение $x_1 = 1$. Найти второе приближение x_2 к решению этого уравнения.

1) $x_2 = \frac{7}{9}$; 2) $x_2 = \frac{11}{7}$; 3) $x_2 = \frac{9}{15}$; 4) $x_2 = \frac{21}{17}$;

5) $x_2 = \frac{17}{14}$.

8. Метод Ньютона применяется к решению уравнения $f(x) \equiv x^3 + 3x - 1 = 0$, взяв за начальное приближение $x_0 = 0$. Найти второе приближение x_2 к решению этого уравнения.

1) $\frac{27}{67}$; 2) $\frac{43}{117}$; 3) $\frac{35}{103}$; 4) $\frac{31}{95}$; 5) $\frac{29}{90}$.

9. Последовательные приближения к решению уравнения $f(x) = 0$ в методе Ньютона определяются по формулам:

1) $x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$; 2) $x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f(x_n)}$;

3) $x_{n+1} = x_{n-1} + \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$; 4) $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$;

5) $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2f'(x_n)}$.

10. Известно, что метод Ньютона $x_{n+1} = \dfrac{3x_n^4 + 4x_n^3 + 1}{4x_n^3 + 6x_n^2 + 1}$ сходится. Он сходится к решению уравнения:

1) $x^4 + 2x^3 + x - 1 = 0$; 2) $3x^4 + 4x^3 + 1 = 0$;
3) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 1 = 0$; 4) $4x^3 + 6x^2 + x - 1 = 0$;
5) $3x^3 + 6x^2 + x - 1 = 0$.

11. Найти третью норму матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

1) $\| A \|_3 = 2$; 2) $\| A \|_3 = \sqrt{2}$; 3) $\| A \|_3 = 1$;
4) $\| A \|_3 = 0.5$; 5) $\| A \|_3 = \sqrt{5}$.

12. Найти третью норму матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$:

1) $\sqrt{10}$; 2) 3; 3) $\sqrt{8}$; 4) $\sqrt{7}$; 5) $\sqrt{6}$.

1 3. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Найти $q = \dfrac{\| b \|_1}{\| A \|_1} + \dfrac{\| b \|_2}{\| A \|_2}$.

1) $\dfrac{5}{3}$; 2) $\dfrac{12}{7}$; 3) $\dfrac{13}{6}$; 4) $\dfrac{11}{6}$; 5) $\dfrac{4}{3}$.

14.Пусть

$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ 2 & -a & -1 \\ 1 & -3 & a \end{pmatrix}$, решить уравнение $\| A \|_1 + \| A \|_2 = 13$

1) {-3;3}; 2)4 ; 3){-1;1}; 4)4; 5){-2;2}.

15. Пусть

$A = \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ a & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, решить неравенство $\| A \|_2 \le 6$.

1) $a \in (-\infty;2)$; 2) $a \in [-1;1]$; 3) $a \in [-2;2]$;
4) [0;2]; 5) $a \in [0;1]$.

16. Пусть $A = \begin{pmatrix} -a & 2 \\ 3 & 2a \end{pmatrix}$, решить уравнение $2 \| A \|_2 = 7$.

1) $\{-\dfrac{3}{4}; \dfrac{3}{4}\}$; 2) $\{\dfrac{3}{4}\}$; 3) $\{\dfrac{3}{4};1\}$; 4) $\{-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\}$;

5) $\{-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\}$.

17. Пусть $A = \begin{pmatrix} -a & -2 \\ 3 & 2a \end{pmatrix}$. Решить неравенство $\| A \|_1 \le 7$:

1) $a \in [-5;5]$; 2) $a \in [-2;2]$; 3) $a \in [-1;1]$;

4) $a \in [0;3]$; 5) $a \in [0;2]$.

18. Найти второе приближение к решению системы.

$$\begin{cases} x_1 = -0.2x_1 - 0.2x_2 + 0.1x_3 + 2; \\ x_2 = 0.1x_1 + 0.1x_2 - 0.2x_3 + 1; \\ x_3 = 0.1x_1 - 0.1x_2 - 1. \end{cases}$$

методом простой итерации, взяв вектор $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ за начальное приближение.

1) $\begin{pmatrix} 1.3 \\ 1.5 \\ -0.9 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1.21 \\ 1.82 \\ -1.02 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.3 \\ -1.1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1,3 \\ 1,2 \\ -0,8 \end{pmatrix}$.

19. Найти второе приближение к решению системы.

$$\begin{cases} x_1 = 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + 1; \\ x_2 = 0.1x_1 - 0.2x_3 - 1; \\ x_3 = 0.2x_1 + 0.2x_2 + 0,2x_3 + 2. \end{cases}$$

методом простой итерации, взяв вектор $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ за начальное приближение.

1) $\begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.3 \\ 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1.4 \\ -1.3 \\ 2.4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1.5 \\ -1.3 \\ 2.4 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1.3 \\ -1.5 \\ -2 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

20. Найти второе приближение к решению системы.

$$\begin{cases} x_1 = 0.2x_1 - 0.1x_2 + 0.2x_3 + 2; \\ x_2 = -0.1x_1 + 0.2x_3 - 2; \\ x_3 = 0.3x_1 + 0.1x_2 - 0,1x_3 + 3. \end{cases}$$

методом простой итерации, взяв вектор $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ за начальное приближение.

1) $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3,2 \\ -2,6 \\ 3,1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2,8 \\ -2,4 \\ 2,6 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3,2 \\ -2,6 \\ 3,2 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 3,3 \\ -2,6 \\ 3,1 \end{pmatrix}$.

21. Найти первое приближение к решению системы

$$\begin{cases} x_1 = 0.2x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 + 1; \\ x_2 = 0.1x_1 + 0,4x_3 + 2; \quad , \\ x_3 = -0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.2x_3 + 1 \end{cases}$$

методом простой итерации, взяв вектор $x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ за начальное приближение.

1) $\begin{pmatrix} 1.2 \\ 2.5 \\ 1.4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0.8 \\ 2.5 \\ 1.4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0.8 \\ 2.4 \\ 1.3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0.8 \\ 2.5 \\ 1.3 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 1.3 \end{pmatrix}$.

22. Метод простой итерации $X^{k+1} = Bx^k + c$ для системы $x = Bx + c$ с $B = \begin{pmatrix} a & 3 \\ a^2 & -a \end{pmatrix}$ расходится при любом начальном приближении, если:

1) $a = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$; 2) $a = \dfrac{1}{\pi}$; 3) $a = -e^{-1}$; 4) $a = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{x+3} dx$;

5) $a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

23. Найти первое приближение к решению системы:

$$\begin{cases} x_1 = -0.2x_1 - 0.2x_2 + 0.1x_3 + 2, \\ x_2 = 0.1x_1 + 0.1x_2 - 0.2x_3 + 1, \\ x_3 = 0.1x_1 - 0.1x_2 - 1 \end{cases}$$

методом Зейделя, взяв вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ за начальное приближение.

1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0.2 \\ 1.08 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0.2 \\ 1.1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1.1 \\ -1.12 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1.5 \\ -0.85 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1.2 \\ -0.92 \end{pmatrix}$.

24. Найти первое приближение к решению системы:

$$\begin{cases} x_1 = 0.4x_1 + 0.1x_2 + 1, \\ x_2 = -0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 + 2, \\ x_3 = 0.1x_1 + 0.1x_2 - 0.2x_3 - 1 \end{cases}$$

методом Зейделя, взяв вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ за начальное приближение.

1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1.2 \\ -0.5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \\ -0.82 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1.8 \\ -0.72 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1.9 \\ -0.85 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2.1 \\ -0.55 \end{pmatrix}$.

25. Найти первое приближение к решению системы:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3x_1 + 0.1x_2 - 0.1x_3 + 2, \\ x_2 = 0.4x_1 + 0.1x_3 - 1, \\ x_3 = -0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 + 1 \end{cases}$$

методом Зейделя, взяв вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ за начальное приближение.

1) $\begin{pmatrix} 2 \\ -0.2 \\ 0.56 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 \\ -0.4 \\ 0.44 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 2 \\ -0.2 \\ 0.56 \end{pmatrix}$.

26. Найти приближенное решение $y(x)$ задачи Коши

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{x^2+1} - (x-1)^2, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

на отрезке [0;0,4], разлагая $y(x)$ в ряд Тейлора с четырьмя членами разложения. Найти

$$\max_{0 \le x \le 0,4} \left| y(x) - x^2 - 1 \right|.$$

27. Методом Эйлера с шагом $h = 0{,}1$ найти приближенно $y(0{,}3)$, где $y(x)$ – решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = x(y-x)^2 - x^3 + 2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

28. Описать как найти $y(0{,}5)$, используя явную формулу Адамса

$$y_{n+1} = y_n + h\frac{3f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1})}{2}$$

с шагом $h = 0{,}1$, как затем уточнить это значение, используя неявную формулу Адамса.

29. Привести вывод явной двухшаговой формулы Адамса.

30. Найти методом прогонки $y(0{,}2)$, где $y(x)$ - решение задачи:

$$\begin{cases} y'' - \dfrac{y}{x^2+1} = 1, \ 0 < x < 0{,}3, \\ y(0) = 1, \ y(0{,}3) = 1{,}09. \end{cases}$$

31. Найти методом стрельбы $y(1{,}2)$, где $y(x)$ – решение задачи:

$$\begin{cases} y'' - xy = 2 + x - x^3, \ 1 < x < 1{,}3, \\ y(1) = 0, \quad y(1{,}3) = 0{,}69. \end{cases}$$

Критерии оценки:

- оценка «отлично» выставляется студенту, если верно и правильно выполнено 90%-100% заданий;
- оценка «хорошо» выставляется студенту, если верно и правильно выполнено 70%-80% заданий;
- оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если верно и правильно решено 50%-60% заданий, возможны некоторые исправления при решении;
- оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если верно выполнено менее 50% заданий;

Темы сообщений

1. Метод простой итерации решения СЛАУ. Необходимые и достаточные условия сходимости.
2. Методом Эйлера с шагом h=0.1 найти решение задачи Коши
$$\begin{cases} y' = y - x^2 + 2x, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
в точке x=0.2.
3. Теорема об оценке погрешности метода простой итерации решения СЛАУ.
4. Метод Зейделя решения СЛАУ. Необходимое и достаточное условие сходимости.
5. Найти второе приближение к решению уравнения $x^3 - x - 3 = 0$ методом Ньютона, выбрав начальное приближение так, чтобы метод Ньютона сходился.
6. Метод сеток решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона.
7. Метод простой итерации приближенного решения нелинейного уравнения.Теорема о его сходимости и оценке погрешности.
8. Численный метод Эйлера решения задачи Коши для ОДУ первого порядка.
9. Методы Рунге-Кутта решения задачи Коши для ОДУ первого порядка. Вывод формул второго порядка точности.
10. Нормы векторов и матриц. Три нормы векторов. Сходимость последовательностей векторов и матриц.
11. Основные понятия теории разностных схем (узел, сетка, аппроксимация, порядок аппроксимации, устойчивость, сходимость, порядок сходимости).
12. Составить методом простой итерации сходящийся итерационный процесс к решению системы
$$\begin{cases} 5x + 2y - 2z = 11, \\ 2x + 5y - z = 13, \\ 3x \qquad + 4z = -1. \end{cases}$$
Найти 2 последовательных приближения к решению и оценить погрешность.
13. Абсолютные и относительные погрешности суммы, разности, произведения и частного.
14. Оценка погрешности одношаговых методов.
15. Составить сходящийся итерационный процесс Зейделя к решению системы
$$\begin{cases} 5x - 2y - 8, \\ 3x + 4y = 10. \end{cases}$$
Найти 3 последовательных приближения к решению. Сравнить третье приближение с точным

решением.

Реферат оценивается следующим образом:
- соответствие содержания теме- 4 балла;
- глубина проработки материала, 3 балла;
- грамотность и полнота использования источников, 1 балл;
- соответствие оформления реферата требованиям, 2 балла;
- доклад, 5 баллов;
- умение вести дискуссию и ответы на вопросы, 5 баллов.

Максимальное количество баллов: 20.

Критерии оценки:
- оценка «отлично» выставляется студенту, если набрал 19-20 баллов;
- оценка «хорошо» выставляется студенту, если набрал 15-18 баллов;
- оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если набрал 10-14 баллов;

оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если набрал менее 10 баллов

Лабораторные работы

Лабораторные занятия проводятся в специально оборудованных кабинетах.

В ходе проведения работ используются план работы. При выполнении лабораторной работы студент ведет рабочие записи результатов, оформляет расчеты, анализирует полученные данные путем установления их соответствия нормам и/или сравнения с известными в литературе данными и/или данными других студентов. Окончательные результаты оформляются в форме заключения.

МОДУЛЬ 1 Численные методы алгебры.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

Численные методы алгебры.
ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ

Тема: *прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений(СЛАУ).*
Цель: *научиться решать СЛАУ на ЭВМ прямыми методами.*

Вариант 1

Решить СЛАУ $Ax = b,$ где

$$A = \begin{pmatrix} 3{,}1 & 2{,}7 & -6.1 & 0 & 5{,}2 \\ 2{,}8 & -3{,}5 & 4{,}3 & 1{,}5 & 2{,}6 \\ -5{,}4 & 2{,}7 & 6{,}4 & 3{,}5 & -1{,}6 \\ 1{,}3 & 0 & 2{,}5 & 6{,}1 & 6{,}8 \\ 2{,}0 & 7{,}1 & -3{,}7 & 4{,}9 & -6{,}7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4{,}1 \\ 4{,}7 \\ -3{,}1 \\ 2{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение получить с 4-мя десятичными знаками. Вычислить вектор невязки $r = (r_1, \dots, r_5)$,

$r_i = \sum_{j=1}^{5} a_{ij} x_j^* - b_i, \quad i = \overline{1{,}5}, \ x^* = (x_1^*, \dots, x_5^*)$ -полученное решение.

Вычислить матрицы A^{-1}. В элементах матрицы A^{-1} сохранять по 2 десятичных знака.

Вычислить величину $\mu = \max\limits_{1 \le i \le 5} \left| \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \right|$.

Вариант 2

Решить СЛАУ $Ax = b,$ где

$$A = \begin{pmatrix} 3{,}7 + k & 4{,}8 & -2{,}7 & 6{,}5 \\ 4{,}8 & -1{,}6 + k & 2{,}8 & -3{,}7 \\ -2{,}7 & 2{,}8 & 3{,}0 + k & 5{,}8 \\ 6{,}5 & -3{,}7 & 5{,}8 & 2{,}5 - k \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5{,}2 \\ -1{,}7 \\ 0 \\ 6{,}3 \end{pmatrix}$$

для значений *k=0; 1,6; 2,5; -3,0.*Решение получить с 4-мя десятичными знаками. Вычислить вектор невязки $r = (r_1, \ldots, r_4)$ при тех же значениях k, $r_i = \sum\limits_{j=1}^{4} a_{ij} x_j^* - b_i, \quad i = \overline{1,4}, \quad x^* = (x_1^*, \ldots, x_4^*)$ - полученное решение. Вычислить обратную матрицу A^{-1} при $k=1$. В элементах матрицы A^{-1} сохранять по 2 десятичных знака.

Вариант 3

Решить СЛАУ $Ax = b,$ где $A = (a_{ij}), \ b = (b_i)$,

$$a_{ij} = i + 0{,}5(-1)^{i+j} \frac{j^2}{i+j}, \mathrm{b_i} = \frac{2i+1}{3}, \mathrm{i, \ j} = \overline{1, \mathrm{n}}$$

при n=3, 5,6.

Решение получить с 4-мя десятичными знаками. Вычислить вектор невязки $r = (r_1, \ldots, r_n)$ при тех же значениях n, $r_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i, \quad i = \overline{1,n}, \quad x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$-полученное решение. Вычислить обратную матрицу A^{-1} при $n=5$. В элементах матрицы A^{-1} сохранять по 2 десятичных знака.

Вариант 4

Решить системы $A^k x = b^k$ при k =1, 2, …, 5. Матрицы A^k и вектор b^k определяются следующим образом

$$A^1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^{k+1} = \frac{1}{k} A^k + E$$, *E*- единичная матрица,

$$b^k = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ k = \overline{1, \ 5}.$$

В решении сохранять по 2 десятичных знака. При k=3 вычислить вектор невязки $r = (r_1, \ldots, r_k), \quad r_i = \sum\limits_{j=1}^{4} a_{ij}^3 x_j^* - b_i^3, \quad i = 1, \ 2, \ 3, \ 4,$ где $a_{ij}^3, \ b_i^3$- элементы матрицы A^3 и вектора b^3 соответственно, $x^* = (x_1^*, \ldots, x_4^*)$-полученное решение.

Вариант 5

Решить систему $Ax = b$, где элементы a_{ij} матрицы *A* и компоненты b_i вектора *b* определяются следующим образом:

$$a_{11} = 1,\ \ a_{i1} = -i; a_{1i} = i,\ (i = \overline{2, n}),\ a_{i+1,\, j+1} = \frac{2a_{ij} + i + j}{n},\ i,\ j = \overline{1, n-1};$$

$$b_i = \sum_{k=1}^{i} (-1)^k k^2,\ i = \overline{1, n}\ .$$

Решение найти для значений *n*= 4 и 5. В результатах сохранять по 4 десятичных знака. Вычислить вектор невязки $r = (r_1, \ldots, r_n)$ при *n*= 4, $r_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i,\quad i = \overline{1, n},$ где $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ -полученное решение.

Найти матрицу A^{-1} обратную матрице *A* при *n*= 3. Элементы матрицы A^{-1} получить с двумя десятичными знаками. Найти произведение матрицы *A* и полученной матрицы A^{-1}. В элементах полученной матрицы сохранять по 4 десятичных знака.

Вариант 6

1. Решить систему $Ax = b$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1.32 & 2.78 & -4.23 & 2.48 \\ -5.07 & 6.82 & 2.05 & 0 \\ 8.43 & -3.46 & 1.89 & -9.21 \\ 0 & 9.56 & -4.63 & 2.97 \end{pmatrix},\quad b = \begin{pmatrix} 3.12 + k \\ 4.45 - k \\ -3.60 + k \\ k \end{pmatrix}$$

для значений *k*= 0, 1.18, 4.45, 3.60.

Решение получить с 4-мя десятичными знаками.

Вычислить вектор невязки $r = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ при *k*= 0, $r_i = \sum\limits_{j=1}^{4} a_{ij} x_j^* - b_i,\quad i = 1, 2, 3, 4$,

где $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ -полученное решение.

Найти матрицу A^{-1} обратную матрице *A* . В элементах матрицы A^{-1} сохранять по 2 десятичных знака. Найти произведение матрицы *A* и полученной матрицы A^{-1}. В элементах полученной матрицы сохранять по 4 десятичных знака.

Вычислить величину $\mu = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{4} a_{ij}^2}$. В результате сохранить 4 десятичных знака.

Вариант 7

1. Решить систему $Ax = b$, где

$$A = \begin{pmatrix} 5{,}55 & -6{,}01 & 3{,}48 & 4{,}28 & 5{,}72 \\ 2{,}77 & 5{,}65 & -4{,}02 & 0{,}15 & 0 \\ 7{,}91 & -0{,}62 & 9{,}31 & 6{,}47 & 0{,}02 \\ -4{,}81 & 8{,}56 & -3{,}69 & 0 & 8{,}47 \\ 0 & 10{,}23 & -1{,}18 & 2{,}89 & -5{,}69 \end{pmatrix},\quad b = \begin{pmatrix} 2.33 \\ -8{,}91 \\ 5{,}68 \\ 0{,}13 \\ -2{,}85 \end{pmatrix}.$$

Решение получить с 4 - мя десятичными знаками. Вычислить вектор невязки $r = (r_1, \ldots, r_5)$,

$r_i = \sum\limits_{j=1}^{5} a_{ij} x_j^* - b_i,\quad i = 1, \ldots, 5,$ где $x^* = (x_1^*, \ldots, x_5^*)$ -полученное решение.

Решить матричное уравнение $AX = C$ где А– матрица, приведенная в пункте 1, а

$$C=\begin{pmatrix} 1{,}41 & 2{,}56 & -3{,}12 & 4{,}08 & 0 \\ 2{,}62 & -5{,}71 & -0{,}18 & 3{,}24 & 6{,}31 \\ 0 & 4{,}17 & 6{,}23 & 0 & -8{,}47 \\ -3{,}55 & 1{,}73 & 4{,}83 & 2{,}66 & 1{,}48 \\ -0{,}27 & 6{,}29 & -0{,}13 & 4{,}11 & 0 \end{pmatrix},$$

Элементы матрицы X получить с двумя десятичными знаками.

Вариант 8

1. Решить систему $Ax=b$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1{,}29 & -12{,}83 & 4{,}78 \\ -6{,}75 & 5{,}92 & -6{,}02 \\ 4{,}64 & 0{,}88 & 6{,}45 \end{pmatrix}, \qquad b=\begin{pmatrix} 3{,}21+k \\ -6{,}24+k \\ 1{,}62-k \end{pmatrix}$$

для значений *k=0, 1.62, 6.24, -3,21.*

Решение получить с 4 – мя десятичными знаками. Вычислить вектор невязки $r=(r_1,.r_2,r_3)$ при *k=0,*

$$r_i=\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j^* - b_i, \quad i=1,2,3, \text{ где } x^*=(x_1^*,x_2^*,x_3^*) \text{–полученное решение.}$$

Решить матричное уравнение $AX+C=D,$ где А– матрица, заданная в пункте 1,

$$D=\begin{pmatrix} 2{,}37 & -3{,}46 & 5{,}02 \\ 4{,}82 & 5{,}81 & 0{,}18 \\ -1{,}79 & 2{,}83 & -3{,}25 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 5{,}62 & 8{,}05 & 2{,}44 \\ 1{,}09 & 6{,}77 & 3{,}28 \\ 0{,}19 & 2{,}38 & -2{,}76 \end{pmatrix}.$$

В элементах матрицы X сохранять по 4 десятичных знака.

Вариант 9

Решить систему $Ax=b$, где $A=(a_{ij}), \mathrm{b}=(\mathrm{b_i}), \mathrm{i,\ j}=\overline{1,\mathrm{n}}, a_{\mathrm{ij}}=n(\frac{1}{i}+\frac{1}{j}), \mathrm{i,\ j}=\overline{1,\mathrm{n}};$

$$b_i=n^2(1+\frac{n+1}{2i}), \mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{n}} \quad \text{при } n=3,4,5,6.$$

Решение получить с 4-мя десятичными знаками. Вычислить вектор невязки $r=(r_1,.r_2,\ldots,r_n)$ при $n=4,$

$$r_i=\sum_{j=1}^{4} a_{ij}x_j^* - b_i,\ i=\overline{1,4}, \text{ где } x^*=(x_1^*,\ldots,x_4^*) \text{ -полученное решение.}$$

Решить при $n=3$ матричное уравнение $AX=C,$ где А- матрица, заданная в пункте 1,

$$C=\begin{pmatrix} 5{,}62 & 8{,}05 & 2{,}44 \\ 1{,}09 & 6{,}77 & 3{,}28 \\ 0{,}19 & 2{,}38 & -2{,}76 \end{pmatrix}.$$

В элементах матрицы X сохранять по 4 десятичных знака.

Вариант 10

Решить методом Гаусса СЛАУ $Ax=b,$ *где* $A(a_{ij}),\ b(b_i)$

$$i,j=\overline{1,n}\ ,\ a_{ij}=n\left(\frac{i+2}{i+1}+\frac{j\cdot i}{j+1}\right), \quad b_i=n^2(i+\frac{n+1}{i}), \quad i,j=\overline{1,n}$$

при *n=4,5,6*. Решение получить с 4-мя десятичными знаками. Вычислить вектор невязки

$r = (r_1, r_2 ..., r_n)$ при n=5,

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i, \qquad i = 1,2,..., n, \text{ где } x^* = (x_1^*,..., x_n^*) - \text{полученное решение.}$$

Решить при $n=4$ матричное уравнение $AX=C$, где A - матрица, заданная в пункте 1, а $C = (C_{ij})$, $C_{ij} = \dfrac{4+i+j}{8-i}$, $i, j = \overline{1, n}$. Элементы матрицы X выписать с двумя десятичными знаками.

МОДУЛЬ 2: Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2
Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Решается задача Коши: $y' = f(x, y)$, $y(a) = y_0$ на отрезке $[a, b]$.

1. Найти шаг интегрирования для решения задачи Коши методом Рунге–Кутта (IV) с точностью 10^{-4}.

2. Найти решение задачи Коши на отрезке $[a, b]$ методом Рунге–Кутта (IV) с точностью 10^{-4}. Построить приближенную интегральную кривую.

3. Найти решение задачи Коши на отрезке $[a, b]$ методом Эйлера. Построить на одном графике (с п. 2) приближенную интегральную кривую.

4. Найти точное решение задачи Коши. Сравнить точное решение с приближенным. Найти максимум модуля отклонений в узловых точках приближенного решения от точного.

5. Записать результаты расчетов в сводную таблицу.

Варианты заданий

№	Задача Коши
1	$y' + xy = 0{,}5(x-1)e^x y^2$, $y(0) = 2$; $a = 0$, $b = 2$.
2	$y' - ytgx = -2/3y^4 \sin x$, $y(0) = 1$; $a = 0$, $b = 1{,}2$.
3	$y' + y^2 = x$, $y(0) = 1$; $a = 0$, $b = 2$.
4	$xy' + y = y^3 e^{-x}$, $y(1) = 1$; $a = 1$, $b = 2$.
5	$y' + xy = 0{,}5(x+1)e^x y^2$, $y(0) = 1$; $a = 0$; $b = 2$.
6	$xy' - y = -y^2(2\ln x + \ln^2 x)$, $y(1) = 2$; $a = 1$, $b = 2$.
7	$y' + 4x^3 y = 4y^2 e^{4x}(1 - x^3)$, $y(1) = 1$; $a = 1$, $b = 2{,}8$.
8	$2y' + 3y\cos x = e^{2x}(2 + 3\cos x)/y$, $y(1) = 2$; $a = 1$, $b = 1{,}6$.
9	$y' + 2xy = 2x^3 y^3$, $y(0) = 1$; $a = 0$, $b = 1$.
10	$xy' + y = y^2 \ln x$, $y(1) = 0{,}5$; $a = 1$, $b = 5$.

Критерии оценки:

- оценка «отлично» выставляется студенту, если выполнены все задания лабораторной работы, составлен отчет по работе
- оценка «хорошо» выставляется студенту, если выполнены почти все задания, за исключением отдельных пунктов, лабораторной работы, составлен отчет по работе
- оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если выполнены больше половины заданий лабораторной работы, составлен отчет по работе
- оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если выполнены меньше половины заданий лабораторной работы и не составлен отчет по работе

Вопросы к зачету

1. *Абсолютная и относительная погрешности.*
2. *Основные источники погрешностей.*
3. *Десятичная запись приближенных чисел. Значащая цифра. Число верных знаков.*
4. *Связь относительной погрешности приближенного числа с количеством верных знаков этого числа.*
5. *Отделение корней нелинейного алгебраического уравнения.*
6. *Метод деления отрезка пополам. Оценка погрешности.*
7. *Метод Ньютона решения нелинейных уравнений. Оценка погрешности.*
8. *Метод простой итерации решения нелинейных алгебраических уравнений. Оценка погрешности.*
9. *Норма матрицы. Три канонические нормы матрицы.*
10. *Матричные ряды. Матричная геометрическая прогрессия.*
11. *Прямые методы решения СЛАУ. Вектор невязки.*
12. *Метод итерации решения СЛАУ. Оценка погрешности.*
13. *Метод Зейделя решения СЛАУ. Оценка погрешности*
14. *Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений*
15. *Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений*
16. *Обзор методов решения уравнений в частных производных*

Критерии оценки:

- «зачтено» выставляется студенту, если изложение полученных знаний в устной форме полное, в системе, в соответствии с требованиями учебной программы; допускаются, отдельные несущественные ошибки, исправляемые учащимися после указания преподавателя на них;
- «не зачтено» выставляется студенту, если изложение учебного материала неполное, бессистемное, что препятствует усвоению последующей учебной информации; существенные ошибки, не исправляемые даже с помощью преподавателя.

Рекомендуемые границы оценок:
«зачтено» - не менее 51% правильных ответов,
«не зачтено»- менее 51% правильных ответов.