Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Дагестанский государственный университет

**К.Р. Адамадзиев**
**Ш. М. Магомедгаджиев**

# Математическая экономика

Учебное пособие

Махачкала 2009

УДК: 330.4 (075.8)
ББК: 65в6я73
Адамадзиев К.Р., Магомедгаджиев Ш. М. Математическая экономика: Учебное пособие. – Махачкала: Издательско-полиграфический центр ДГУ, 2009.-117 с.
ISBN -5-7788-0423-7

В учебном пособии рассматривается применение математических методов и моделей линейного, нелинейного, целочисленного и динамического программирования, а также основы моделирования управленческих решений в экономике. Приводятся классические задачи оптимизационного типа, двойственные задачи линейного программирования, транспортные задачи, задача потребительского выбора. Изложены методы количественного анализа финансовых операций. Подробно обсуждаются различные методы начисления процентов, обобщающие характеристики потоков платежей, методики определения эффективности финансовых операций, включая производственные инвестиции. Даются основные понятия страхования и актуарных расчетов, представлены некоторые концептуальные проблемы страховой математики и изложены возможные подходы к их решению

Пособие предназначено для студентов специальностей «Прикладная информатика в экономике» и «Прикладная информатика в менеджменте», а также может быть полезно студентам, магистрам и аспирантам других специальностей обучающихся по экономическим направлениям.

Рецензенты:
Халилов А. И. - директор Регионального центра информатизации Национального банка Республики Дагестан Банка России, действительный член АТН РФ, МАИ и НАНД, д.т.н., проф.
Петросянц В. З. - зав. лабораторией Института социально-экономических исследований ДНЦ РАН, д.э.н., проф.

ИПЦ ДГУ, 2009

Оглавление

## Модуль I. Линейное программирование в экономике.

### Тема 1. Экономика как объект математического моделирования

1.1 Сущность математической экономики, предмет и задачи курса

Как свидетельствует экономическая теория, в экономике действуют устойчивые количественные закономерности, поэтому возможно их строго формализованное математическое описание. Объект изучения математической экономики как учебной дисциплины - экономика и ее подразделения. Предмет математической экономики - математические модели реальных экономических объектов. Метод математической экономики - системный анализ экономики как сложной динамической системы.

«Математическая экономика» ориентирована на системное изучение экономики с помощью математических моделей макро- и микроуровней, а также в разрезе важнейших функциональных подсистем экономики (производственной и финансово-кредитной).

Экономико-математическое моделирование, являясь одним из эффективных методов описания сложных социально-экономических объектов и процессов в виде математических моделей, превращается тем самым в часть самой экономики, вернее, в сплав экономики, математики и кибернетики. Подтверждением положительной оценки этого явления стало присуждение Нобелевских премий в области экономики в последнее десятилетие в основном только за новые экономико-математические исследования.

Основоположниками экономико-математических методов и моделей являются акад. Л.В. Конторович – лауреат Нобелевской и Ленинской премии, акад. Немчинов В.В. – лауреат Ленинской премии, проф. Новожилов В.В. – лауреат Ленинской премии, Леонтьев В.В. – лауреат Нобелевской премии и др.

Задачей курса является – дать студентам комплекс знаний по постановке и решению экономико-управленческих задач для народного хозяйства, его звеньев и элементов на основе методов математического моделирования с использованием математических методов и вычислительной техники, анализу результатов решения задач и принятию на их основе управленческих решений.

Как известно, в составе экономико-математических методов можно выделить следующие научные дисциплины и их разделы:

– экономическую кибернетику (системный анализ экономики, теорию экономической информации и теорию управляющих систем);

– математическую статистику (дисперсионный анализ, корреляционный анализ, регрессионный анализ, многомерный статистический анализ, факторный анализ, кластерный анализ, частотный анализ и др.);

– математическую экономику и эконометрику (теорию экономического роста, теорию производственных функций, межотраслевые балансы, национальные счета, анализ спроса и потребления, региональный и пространственный анализ, глобальное моделирование и т. п.);

– методы принятия оптимальных решений (математическое программирование, сетевые и программно-целевые методы планировании и управления, теорию массового обслуживания, теорию и методы управления запасами, теорию игр, теорию и методы принятия решений, теорию расписаний и др.; причем только в математическое программирование входит ряд разделов программирования - линейное, нелинейное, динамическое, целочисленное, параметрическое, сепарабельное, стохастическое, дробно-линейное, геометрическое программирование);

– специфические методы и дисциплины экономики (для централизованно планируемой экономики - теорию оптимального функционирования экономики, оптимальное планирование, теорию оптимального ценообразования, модели материально-технического снабжения; для рыночной, или конкурентной, экономики - модели свободной конкуренции, модели монополии, индикативного планирования, модели теории фирмы и др.);

– экспериментальные методы изучения экономики (математические методы анализа и планирования экономических экспериментов, имитационное моделирование, деловые игры, методы экспертных оценок и т.п.).

## 1.2. Модель и моделирование в экономике: сущность, элементы, виды моделей

Модель – это материально или мысленно представляемый образ объекта-оригинала, с помощью которого получают новые знания об этом объекте-оригинале. Из определения следует, что моделировать надо такие объекты, которые трудно или нельзя изучить другими методами.

Построение математической модели системы есть процесс формализации определенных сторон существования, жизнедеятельности системы, ее поведения с точки зрения конкретной решаемой задачи.

Процесс построения модели называют моделированием. Моделирование имеет циклический характер (рис. 1.1.). Цикл моделирования включает четыре этапа: 1-2 – построение модели; 2-3 – изучение модели; 3-4 – перенос знаний с модели на объект; 4-1 применение полученных знаний об объекте.

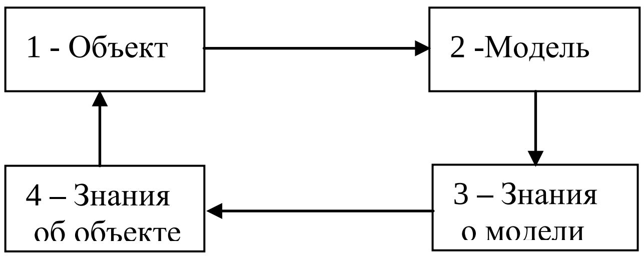


Рис. 1.1. Схема процесса моделирования

В модели можно выделить две группы элементов: внешние и внутренние. Внешние элементы - это знания об объекте, необходимые для построения модели, внутренние элементы – это данные, получаемые с помощью модели.

В моделировании можно выделять три элемента: объект, субъект, модель. Связь этих элементов можно выразить следующим образом: “Субъект с помощью модели изучает объект и управляет этим объектом”.

Модели можно классифицировать по различным признакам.

В частности все модели можно разделить на два больших класса: материальные (физические) и нематериальные (нефизические) или символьные. В классе нематериальных моделей особое место занимают математические модели. Все математические модели можно разделить на экономико-математические и остальные (неэкономико-математические).

Если попытаться классифицировать сами экономико-математические модели, то можно выделить свыше десяти признаков, основными из которых являются:

– по общему целевому назначению - теоретико-аналитические и прикладные модели;

– по степени агрегирования объектов – макроэкономические (функционирование экономики как единого целого) и микроэкономические (предприятия и фирмы) модели;

– по конкретному предназначению - балансовые (требование соответствия наличия ресурсов и их использования), трендовые (развитие моделируемой системы через длительную тенденцию ее основных показателей), оптимизационные (выбор наилучшего варианта из множества вариантов производства, распределения или потребления), имитационные (в процессе машинной имитации изучаемых систем или процессов) модели;

– по типу информации, используемой в модели, - аналитические (на базе априорной информации) и идентифицируемые (на базе апостериорной, экспериментальной информации) модели;

– по учету фактора неопределенности – детерминированные и стохастические модели;

– по характеристике математических объектов или аппарата - модели линейного и нелинейного программирования, корреляционно-регрессионные модели, модели теории массового обслуживания, модели сетевого планирования и управления, модели теории игр и т.п.;

– по типу подхода к изучаемым системам – дескриптивные (описательные) модели (например, балансовые и трендовые модели) и нормативные модели (оптимизационные и модели уровня жизни).

К основным этапам построения экономико-математических моделей относятся:

– выбор объекта моделирования и формулировка задачи;
– сбор исходной информации об объекте;
– математическая запись модели;
– выполнение расчетов на ЭВМ;
– анализ результатов, полученных на ЭВМ, и принятие решений.

### 1.3. Особенности экономики как объекта моделирования.

Особенностями экономики как объекта моделирования являются:

- возможность рассмотрения экономики в целом, экономических объектов, процессов и явлений как сложных систем;
- эмерджентность, означающая, что экономические объекты, процессы и явления обладают такими свойствами, какими не обладает ни один из элементов их образующих;
- вероятностный, неопределенный, случайный характер протекания экономических процессов и явлений;
- инерционный характер развития экономики, в соответствии с которым законы, закономерности, тенденции, связи, зависимости, имевшие место в прошлом периоде, продолжают действовать некоторое время в будущем.

Необходимо обратить внимание также на следующие две особенности экономики как объекта моделирования:

В экономике невозможны модели подобия, которые широко применяются в технике. Например, в гидротехнике широко используется следующий прием: строится точная копия гидроузла (скажем, в масштабе 1:1000) и на этой копии отрабатываются с необходимой корректировкой проектных решений все режимы работы гидроузла. Однако нельзя построить точную копию экономики в масштабе 1:1000 и на этой копии отрабатывать различные варианты экономической политики.

В экономике крайне ограничены возможности локальных экономических экспериментов, поскольку все ее части жестко взаимосвязаны друг с другом и, следовательно, «чистый» эксперимент невозможен.

Разработка математических моделей чрезвычайно трудоемка. Следует напомнить, что модель Кейнса, отражающая возможности рыночной экономики адаптироваться к возмущающим воздействиям, была построена лишь под впечатлением жестоких ударов тяжелейшего кризиса 1929-1933 гг. Однако применение этой модели для выхода из послевоенного кризиса в Германии и Японии было весьма успешным и получило название «экономического чуда».

Таким образом, для выработки правильных экономических решений необходим скрупулезный учет, как всего прошлого опыта, так и результатов, полученных по концептуальным и математическим моделям, наиболее адекватным данной экономической ситуации.

Все вышеперечисленные и другие свойства экономики усложняют ее изучение, выявление закономерностей, динамических тенденций, связей и зависимостей. Математическое моделирование является тем инструментарием, умелое использование которого позволяет успешно решать проблемы изучения сложных систем, в том числе таких сложных, как экономические объекты, процессы, явления.

## Тема 2. Методы математического программирования в экономике

### 2.1. Сущность экономических задач, решаемых методом математического программирования. Общая задача линейного программирования

К экономическим задачам оптимизационного типа относятся задачи, в которых требуется найти наилучшее или оптимальное решение при заданных условиях производства. Такие задачи называются задачами на максимум или минимум. Особенностью задач оптимизационного типа является многовариантность их решений, обусловленная следующими причинами: взаимозаменяемостью ресурсов; взаимозаменяемостью готовых видов продукции; существованием альтернативных технологий производства; неодинаковостью технико-экономических показателей даже однотипных хозяйственных субъектов.

Возможны два подхода к постановке оптимизационных задач: при первом подходе требуется получить максимальные конечные результаты при заданных условиях производства; при втором подходе требуется получить заданные конечные результаты при минимальных затратах ресурсов.

Если не рассматривать детально составление математической модели на конкретных примерах, а перейти к общему случаю, то задача оптимизации в общем случае, включающая три компоненты (целевую функцию *F*, ограничения $g_i$ и граничные условия), имеет следующую математическую постановку:

Найти $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$, при

$$\left.\begin{aligned}
&F = f(x_1, x_2, ... x_n) \;\rightarrow\; \max(\min) \\
&g_1(x_1, x_2, ... x_n) \;\{\le, =, \ge\} d_1; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&g_i(x_1, x_2, ... x_n) \;\{\le, =. \ge\} d_i; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&g_m(x_1, x_2, ... x_n) \;\{\le, =, \ge\} d_m; \\
&a_j \le x_j \le b_j; \\
&i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}.
\end{aligned}\right\} \quad (2.1)$$

где $a_i$ и $b_i$ - нижнее и верхнее предельно допустимые значения $x_j$.

Задачу (2.1) можно представить в более общей компактной форме записи:

Найти $\{X_j\}$, при

$$\left.\begin{aligned}
&F = f(x_j) \;\rightarrow\; \max(\min) \\
&g_i(x_j) \;\{\le, =, \ge\} d_i; \\
&a_j \le x_j \le b_j; i = \overline{1,m};\; j = \overline{1,n}.
\end{aligned}\right\} \quad (2.2)$$

Граничные условия показывают предельно допустимые значения искомых переменных, и в общем случае они могут быть двусторонними типа: $a_j \le x_j \le b_j$.

Вместе с тем на практике достаточно часто возникают следующие частные случаи:

1) в технических, экономических и других видах расчетов искомые величины обычно являются положительными или равными 0. В этом случае в задаче (2.2) накладывается только требование неотрицательности $x_j \ge 0$;

2) в ряде случаев значение величины $x_i$ может задаваться. Если принять, что должно выполняться требование $x_i = x^3{}_i$ где $x^3{}_i$ - заданное значение, то граничные условия в задаче (2.2) можно записать следующим образом:

$x_{1j}{}^3 \le x_j \le x_{2j}{}^3$

Совокупность значений переменных, удовлетворяющая заданным граничным условиям и ограничениям, называют допустимым решением задачи. Допустимое решение, удовлетворяющее целевой функции называется оптимальным

В любых моделях оптимизационного типа можно выделить следующие элементы: исходные данные, зависимости, описывающие целевую функцию, и ограничения.

Зависимости между переменными, как целевые функции, так и ограничения, могут быть линейными и нелинейными. Линейными называют такие зависимости, в которые переменные входят в первой степени.

Математический инструментарий, позволяющий решать экономические задачи оптимизационного типа, называется программированием. Различают линейное и нелинейное программирование.

Для экономических систем наиболее характерны задачи оптимизации и распределения ресурсов, решаемые методом линейного программирования, Более сложные задачи (целочисленные, нелинейные) оптимизации можно свести к задачам линейного программирования. В целом методы математического программирования являются частью науки, традиционно называемой исследованием операций. Методы линейного программирования в математике известны под названием общей задачи линейного программирования.

Аналитическая формулировка общей задачи линейного программирования

Общая задача линейного программирования формулируется следующим образом: Найти решение $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$, позволяющее максимизировать или минимизировать целевую функцию

1. $F = C_1 X_1 + C_2 X_2 + ... + C_n X_n$

при условиях

$$2.\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1n}X_n \le b_1; \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{2n}X_n \le b_2; \\ ............................................ \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + ... + a_{nn}X_n \le b_n. \end{cases}$$

3. $X_1 \ge 0; X_2 \ge 0; ...; X_n \ge 0$

Это развернутая запись общей задачи линейного программирования.

Сокращенная запись этой модели имеет вид:

Найти решение $\{X_j\}$, позволяющее максимизировать (минимизировать) функцию

1. $F = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$

при условиях

2. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le b_i$ , $i = 1,2,..., n;$

3. $X_j \ge 0,\ j = 1,2,..., n.$

Вышеприведенные записи общей задачи линейного программирования называют аналитической формой записи.

Показатель, принимаемый в качестве цели решения задачи называют критерием оптимальности. Критерий часто называют целевой функцией, функцией цели, а в математических работах - функционалом.

Различают народнохозяйственные и локальные критерии. Нет единого народно-хозяйственного критерия. В качестве такого критерия используются различные макроэкономические показатели. Локальные критерии - это критерии для отдельных звеньев народного хозяйства и хозяйственных объектов.

Этапы построения оптимизационных моделей в аналитической форме

Можно выделить следующие этапы построения оптимизационных моделей:

- формулировка задачи и выбор объекта;
- определение перечня переменных;
- определение перечня условий-ограничений;
- информационное обеспечение модели;
- математическая запись модели;
- решение задачи на ЭВМ;
- анализ результатов решения задачи;
- принятие оптимального решения к реализации.

Для понимания сущности решения задач оптимизации важное значение имеют теорема о допустимых решениях, об оптимальном решении и о допустимом базисном решении

Согласно теоремы о допустимых решениях - множество всех допустимых решений системы ограничений задачи линейного программирования является выпуклым. Это множество называется многогранником решений (см. рис 2.1)

Теорема об оптимальном решении гласит: «Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то линейная функция принимает max(min) значение в одной из угловых точек многогранника решений. Если линейная функция принимает max(min) значение более чем в одной угловой точке, то она принимает его в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих точек».

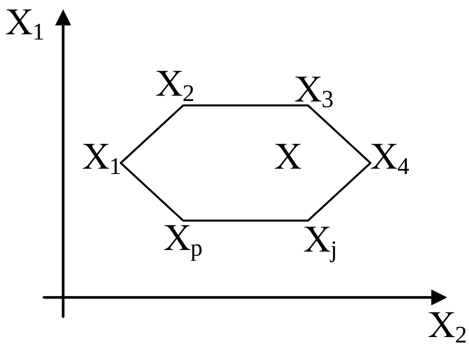


Рис. 2.1. Многогранник решений задачи линейного программирования

Теорема о допустимом базисном решении формулируется следующим образом: «Каждому допустимому базисному решению задачи линейного программирования соответствует угловая точка многогранника решений, и наоборот, каждой угловой точке многогранника решений соответствует допустимое решение».

## 2.2. Классические экономические задачи, решаемые методами математического программирования

К классическим задачам оптимального типа относятся задачи, на основе которых создавалась теория оптимизационных моделей. К ним относятся задачи: ассортимента продукции, загрузки оборудования, рецептуры сырья, раскроя материалов, задача о перевозках (транспортная задача), размещения производства и др.

Задача ассортимента продукции формулируется следующим образом: на предприятии имеются различные виды сырья, из которых можно производить различные виды продукции. Известны: объем каждого вида сырья, нормы их расхода на производство каждого вида продукции, а также величины показателя, принятого за критерий оптимальности на единицу каждого вида продукции. Требуется составить оптимальный ассортиментный план, позволяющий предприятию максимизировать экономический эффект.

Запишем модель ассортимента продукции в сокращенном символическом виде: требуется разработать оптимальный ассортиментный план $\{X_j\}$ позволяющий предприятию максимизировать экономический эффект

$$F = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \to \max \ (\min),$$

при условиях:

1) соблюдения ограничений по использованию сырья

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} * X_j \le b_i \;;\; i = 1,2,...,n;$$

2) неотрицательности переменных $X_j$; j=1,2,….,n,

где, $X_j$ -искомый объем продукции j –го вида;

$C_j$ - величина показателя принятого за критерий оптимальности на единицу продукции $j$ – го вида;

$a_{ij}$ - нормы расхода $i$–го вида сырья на производство продукции j-го вида;

$b_i$ – объем сырья $i$ -го вида;

$j$ – индекс видов продукции;

$n$ – число видов продукции;

$i$ – индекс видов сырья;

$m$ – число видов сырья.

Задача загрузки оборудования (задача акад. Л.В. Конторовича) формулируется следующим образом: На предприятии имеются различные виды взаимозаменяемых машин, на которых можно выпускать различные виды продукции. Известны: фонд времени работы машин, производительность машин (или трудоёмкость продукции), потребность в продукции каждого вида, величины показателя, принятого за критерий оптимальности на единицу продукции каждого вида, производимой на каждой машине. Требуется составить оптимальный план загрузки машин, позволяющий предприятию максимизировать экономический эффект.

Рассмотрим численный пример. Пусть имеются три вида машин, на которых производится четыре вида продукции. Необходимая информация приведена ниже (см. таблицу 2.1).

Требуется составить оптимальный план загрузки машин, позволяющий минимизировать затраты на производство всей продукции.

Таблица. 2.1

Известные значения показателей для задачи загрузки оборудования

| Виды машин | Виды продукции, производительность машин (т/час) затраты на единицу продукции (тыс. руб./т) | | | | Фонд времени работы машин, час |
|---|---|---|---|---|---|
| | А | Б | В | Г | |
| 1 | 3,5/27,0 | 2,6/18,7 | 5,6/10,3 | - | 720 |
| 2 | - | 1,8/23,4 | 2,1/22,5 | 4,5/38,7 | 720 |
| 3 | 1,7/33,5 | 1,6/26,5 | - | 2,3/65,4 | 480 |
| Потребность в продукции, т. | 1000 | 1200 | 1500 | 800 | |

Примечание. В каждой клетке в числителе производительность машин, в знаменателе – затраты на единицу продукции.

Определим перечень переменных:

$X_{11}$- искомое время работы 1–ой машины по производству продукции вида А, час.;

$X_{12}, X_{13}$ - тоже по продукции видов Б и В соответственно, час.;

$X_{22}, X_{23}, X_{24}$ – искомое время работы 2-го вида машин на производство продукции видов Б, В и Г соответственно, час.;

$X_{31}, X_{32}, X_{34}$ – тоже для 3-го вида машин, час.

Определим перечень ограничений:

1,2,3 – ограничения на фонд времени работы машин 1-го,2-го и 3-го видов;

4,5,6,7 – ограничения по удовлетворению потребности в продукции видов А, Б, В и Г.

В качестве критерия оптимальности по условию задачи выступает min суммарных затрат на производство всей продукции.

Запишем экономико-математическую модель в аналитической форме. Требуется составить оптимальный план загрузки машин

$\{X_{11}, X_{12}, ..., X_{34}\}$, позволяющий предприятию минимизировать затраты

$$F = 27{,}0 * 3{,}5 * X_{11} + 18{,}7 * 2{,}6 X_{12} + ... + 65{,}4 * 23{,}4 * X_{34} \rightarrow \min$$

при условиях:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 720;$$
$$X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 720;$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{34} \leq 480;$$
$$3{,}5 X_{11} + 1{,}7 X_{13} = 1000;$$
$$2{,}6 X_{12} + 1{,}8 X_{22} + 1{,}6 X_{32} = 1200;$$
$$5{,}6 X_{13} + 2{,}1 X_{23} = 1500;$$
$$4{,}5 X_{24} + 2{,}3 X_{34} = 800;$$
$$X_{11}, X_{12}, ..., X_{34} \geq 0.$$

Сокращенно модель по оптимизации загрузки оборудования можно записать следующим образом.

Найти оптимальный план загрузки машин $\{X_{ij}\}$, позволяющий максимизировать экономический эффект

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} a_{ij} X_{ij} \rightarrow \max(\min)$$

при условиях:

1) соблюдения ограничений на фонд времени работы машин

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq B_i; \qquad i = 1,2,..., m;$$

2) соблюдения ограничений по удовлетворению потребности в продукции

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} X_{ij} = A_j; \; j = 1,2,..., n;$$

3) неотрицательности переменных

$X_{ij} \geq 0; i = 1,2,...m; j = 1,2,...n;$ где,

$X_{ij}$ - искомое время работы $i$–ой машины по производству $j$-ой продукции;

$C_{ij}$ - величина показателя принятого за критерий оптимальности на единицу $j$ - ой продукции, произведенной на $i$-ой машине;

$a_{ij}$ - производительность (или трудоемкость) $i$-ой машины по производству $j$–го вида продукции;

$B_i$ – фонд времени работы $i$-ой машины;

$A_j$ - потребность продукции $j$ – го вида;

$i$ - индекс видов машин;

$m$ - число видов машин;

$j$ - индекс видов продукции;

$n$ - число видов продукции.

Задача рецептуры сырья (задача о смесях) формулируется следующим образом: из различных видов сырья путем их смешивания можно производить один и тот же вид продукции в заданном объеме. Известны: содержание полезных компонентов разных видов в единице каждого вида сырья и в единице готовой продукции; цены на все виды сырья; объем продукции, который должен быть выработан. Требуется составить оптимальный план рецептуры сырья, позволяющий минимизировать суммарные затраты на закупку сырья.

Математическая модель этой задачи имеет вид (сокращенная запись).

Составить оптимальную рецептуру сырья $X_j$ позволяющую минимизировать суммарные затраты на сырье $F = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \rightarrow \min$

при условиях:

1) соблюдения балансовых соотношений по содержанию полезных компонентов в сырьевой смеси и в объеме готовой продукции

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i \ ; \ i = 1,2,...,m;$$

2) соблюдения равенства сырьевой смеси объему готовой продукции

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = R \, ;$$

3) неотрицательности переменных

$$X_j \geq 0 \ ; \ j = 1,2,...,n;$$

В модели приняты следующие обозначения:

$X_{ij}$ - искомый объём $j$-го вида сырья, необходимый для производства заданного объема готовой продукции;

$C_j$ - цена $j$-го вида сырья;

$a_{ij}$ – содержание полезных компонентов $i$-го вида в единице $j$-го вида сырья;

$b_i$ - содержание полезных компонентов $i$-го вида в заданном объеме готовой продукции;

$R$ – заданный объём готовой продукции;

$j$ - индекс видов сырья;

$n$ - число видов сырья;

$i$ - индекс видов полезных компонентов;

$m$ – число видов полезных компонентов.

## 2.3. Транспортные задачи.

Задачи о перевозках также относятся к задачам классического типа и их можно решать методами общей задачи линейного программирования. Однако для этих задач разработан свой математический инструментарий, являющийся более простым, удобным и экономически эффективным.

Сформулируем задачу о перевозках. Имеются различные поставщики одной и той же продукции и различные потребители этой продукции. Известны: объем продукции у каждого поставщика; спрос на продукцию каждого потребителя; величина показателя принятого за критерий оптимальности на единицу продукции, перевозимой от каждого поставщика к каждому потребителю. Требуется составить оптимальный план перевозки продукции (план поставок), позволяющий максимизировать экономический эффект.

Пример. Пусть имеется три поставщика продукции одного и того же вида и четыре потребителя этой продукции. Объем продукции у поставщиков, спрос потребителей и затраты на перевозку единицы продукции по каждому маршруту приведены в таблице.

Таблица 2.2.

Известные значения показателей для транспортной задачи

| Поставщики | Потребители, затраты на перевозку (тыс.руб./т) | | | | Объем продукции, т |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| 1 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 900 |
| 2 | 1,8 | 0,6 | 0,3 | 1,3 | 1300 |
| 3 | 3,2 | 2,7 | 1,9 | 1,1 | 800 |
| Спрос потребителей, т | 700 | 600 | 1500 | 200 | 3000/3000 |

Требуется составить оптимальный план перевозки продукции, позволяющий минимизировать суммарные затраты на перевозку.

Перечень переменных:

$X_{11}$ - искомый объем продукции, перевозимого от 1-го поставщика 1-му потребителю;

$X_{12}, X_{13}, X_{14}$ –то же 2-му, 3-му, 4-му потребителям;

$X_{21,}, X_{22}, X ,..., X_{34}$ –то же по остальным перевозкам.

Перечень ограничений:

1,2,3 – ограничения на объем поставок продукции от каждого поставщика;

4,5,6,7 – ограничения по удовлетворению спроса каждого потребителя.

Выбор критерия оптимальности $\rightarrow$ минимум суммарных затрат на перевозку.

Математическая запись модели.

Найти оптимальный план поставок продукции $\{X_{11,}, X_{12},..., X_{34}\}$ позволяющий минимизировать затраты на перевозку:

$F = 10X_{11} + 15X_{12} + ... + 11X_{34} \rightarrow \min$

при условиях:

1) $X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 900$

2) $X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 1300$

3) $X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 800$

4) $X_{11} + X_{21} + X_{31} = 700$

5) $X_{12} + X_{22} + X_{32} = 600$

6) $X_{13} + X_{23} + X_{33} = 1500$

7) $X_{14} + X_{24} + X_{34} = 200$

Запишем модель задачи в символическом виде.

Найти оптимальный план перевозки $\{X_{ij}\}$, позволяющий максимизировать экономический эффект

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} \rightarrow \max \ (\min)$$

при условиях:

1) соблюдения ограничений на объем поставок продукции от каждого поставщика

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = b_i \quad i = 1,2,..., m;$$

2) соблюдения ограничений по удовлетворению спроса каждого потребителя

$$\sum_{j=1}^{m} X_{ij} = a_j \quad j = 1,2,..., n;$$

3) не отрицательности переменных

$X_{ij} \geq 0$ ; $i = 1,2,..., m;$ $j = 1,2,..., n;$

Обозначение модели:

$X_{ij}$ – искомый объем продукции, перевозимой от i-го поставщика к j-му потребителю;

$C_{ij}$ – величина показателя принятого за критерий оптимальности на единицу продукции, перевозимой от $i$-го поставщика к $j$-му потребителю;

$b_i$ – объём продукции у $i$-го вида поставщика;

$a_j$ - спрос на продукцию $j$–го потребителя;

$i$ – индекс поставщика;

$m$ – число поставщиков;

$j$ – индекс потребителя;

$n$ - число потребителей.

Особенностью этой модели является равенство суммарного объема продукции у поставщиков суммарному спросу потребителей, т.е.:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{i=1}^{m} b_i .$$

Такие задачи о перевозках называются задачами закрытого типа.

На практике редки случаи выполнения такого равенства. Чаще в задачах о перевозках объем продукции у всех поставщиков и спрос на продукцию у всех потребителей не равны. Такие задачи можно назвать задачами открытого типа. Для решения их предварительно преобразовывают к закрытому типу.

Возможны два случая:

а) суммарный объем продукции у поставщиков больше суммарного спроса потребителей, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} a_j > \sum_{i=1}^{n} b_i ;$$

б) суммарный объем продукции у поставщиков меньше суммарного спроса потребителей, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} a_j < \sum_{i=1}^{m} b_i .$$

Для преобразования открытой задачи в закрытий тип в первом случае вводят фиктивного потребителя (m+1) со спросом $b_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{i=1}^{m} b_i$ , во втором случае вводят фиктивного поставщика (n+1) с объемом поставок

$$a_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} b_i - \sum_{j=1}^{n} a_j .$$

Методику преобразования открытой задачи к закрытому типу иллюстрируют нижеприведенные таблицы для случая, когда объем продукции у поставщиков больше спроса потребителей

Таблица 2.3

Транспортная задача открытого типа

| Поставщики | Потребители, затраты на перевозку (тыс. руб./ т) | | | | Объем продукции у поставщиков, т |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| 1 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 900 |
| 2 | 1,8 | 0,6 | 0,3 | 1,3 | 1300 |
| 3 | 3,2 | 2,7 | 1,9 | 1,1 | 1100 |
| Спрос потребителей, т | 700 | 600 | 1500 | 200 | 3300/3000 |

Таблица 2.4

Методика преобразования открытой задачи к закрытому типу

| Поставщики | Потребители, затраты на перевозку (тыс. руб./ т) | | | | Фиктивный потребитель | Объем продукции у поставщико, т |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| 1 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 0 | 900 |
| 2 | 1,8 | 0,6 | 0,3 | 1,3 | 0 | 1300 |
| 3 | 3,2 | 2,7 | 1,9 | 1,1 | 0 | 1100 |
| Спрос потребителей, т | 700 | 600 | 1500 | 200 | 300 | 3300 |

На практике часто возникают ситуации, когда перевозки продукции по отдельным маршрутам не целесообразны или ограничены. Методика включения в модель таких ситуаций получила название «Учет пропускной способности в моделях транспортного типа».

Чтобы исключить перевозку по какому-либо маршруту, достаточно численное значение критерия оптимальности по этому маршруту принять значительно большим, чем по остальным маршрутам, если задача решается на минимум и значительно меньшим, если задача решается на максимум.

Остановимся на второй ситуации, которая более распространена на практике, и учет которой более сложен. Рассмотрим пример. Пусть в выше рассмотренной задаче о перевозках продукции от трех поставщиков четырем потребителям по маршруту 2→3 (от второго ростовщика третьему потребителю) можно перевезти не более 800 т. продукции. Методика учета ограничения по пропускной способности показана на следующей таблице

Таблица 2.5

Методика учета ограничения по пропускной способности транспортной задачи

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | | 4 | |
| | | | 3а | 3б | | |
| 1 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,0 | 2,5 | 900 |
| 2 | 1,8 | 0,6 | 0,3 | 1000 | 1,3 | 1300 |
| 3 | 3,2 | 2,7 | 1,9 | 1,9 | 1,1 | 1100 |
| 4 | 700 | 600 | 800 | 700 | 200 | |
| | | | 1500 | | | |

Согласно этой методики требуется выполнить следующие процедуры:

- рассмотреть потребителя, для которого надо учесть ограничение на перевозку (в нашем примере это третий потребитель), как двух потребителей (3а и 3б);
- принять спрос потребителя 3а, равной 800т. (в нашем примере ограничения на перевозку по маршруту 2→3 равно 800 т.), а спрос потребителя 3б равно 700 т. (1500-800);
- принять величины критерия оптимальности для потребителя 3а по всем маршрутам (1→3а, 2→3а, 3→3а) такими же, какими они являются для 3-го потребителя по условию задачи, т.е. соответственно (1→3, 2→3, 3→3);

- принять величины критерия оптимальности для потребителя 3б по маршрутам 1→3б и 3→3б такими же, что и для маршрута 1→3а и 3→3а;

- принять величину критерия оптимальности для маршрута 2→3б (это особый маршрут, перевозки по которой сверх 800 т. не допустимы) значительно большей, чем по всем остальным маршрутам, если задача решается на минимум критериального показателя и значительно меньшим, чем по остальным маршрутам, если задача решается на максимум критериального показателя (в нашем примере задача решается на минимум суммарных затрат на перевозку, поэтому в качестве критериального значения для маршрута 2→3б нужно принять число значительно больше, чем по другим маршрутам, например 1000).

После включения в модель условия, учитывающего пропускную способность, она (модель) превращается в обычную модель транспортного типа. На практике многие виды продукции в силу различных причин перевозятся от поставщиков к потребителям не непосредственно, а через промежуточные пункты (через посредников).

Так, зерно от хозяйств перевозится не на мелькомбинаты, где оно перерабатывается в муку, а на элеваторы, откуда оно поступает на мелькомбинаты по мере необходимости. Это так сказать причина, связанная с технологией переработки сырья.

Другая причина может быть обусловлена экономической целесообразностью. Так, в Республике Дагестан молоко производят сотни хозяйств, а молочных заводов всего 7-8 и расположены они в городах. Перевозка молоко из каждого хозяйства прямо на один из молочных заводов – удовольствие с экономической точки зрения не допустимая. Поэтому многие хозяйства перевозят молоко не на молочные заводы, а на первичные пункты, расположенные как правило, в сельских районных центрах, где молоко охлаждается и после накопления определенного объема перевозится на молочные заводы.

Третья причина связана с природно-климатическими условиями. Так, перевозка многих видов продукции в районы Сибири и Крайнего Севера в летнее время производится морским или речным транспортом до определенных пунктов (дальнейшая перевозка продукции до конечных потребителей затруднена болотистой местностью и отсутствием дорог), в зимние время это продукция доставляется конечным потребителям автотранспортом по дорогам, прокладываемым по замерзшей земле.

Задачи, в которых продукция перевозится конечным потребителям не непосредственно от поставщиков, а через промежуточные пункты, называются многоэтапными (двух-, трех и более этапными). Такие задачи могут быть решены по частям (двухэтапные как две самостоятельные задачи, трехэтапные как три самостоятельные задачи и т.д.). Однако решение задачи по частям не всегда дает общего оптимума. Их целесообразно решать, предварительно преобразовав в одноэтапные. Математикой предложен достаточно простой и оригинальный инструментарий такого преобразования.

Рассмотрим особенности решения многоэтапных задач транспортного типа на примере перевозки зерна (от хозяйства на элеваторы и от элеваторов на мелькомбинаты). Пусть имеются 5 хозяйств, 3 элеватора и 4 мелькомбината. Количества зерна в хозяйствах (в т.), емкость элеваторов (в т.), спрос мелькомбинатов (в т.), а также затраты на перевозку 1 т зерна (в тыс. руб.) от каждого хозяйства до элеватора и от каждого элеватора до каждого мелькомбината приведены в следующих двух таблицах.

Таблица 2.6

Известные показатели из примера о перевозке зерна

| Хозяйства | Элеваторы, затраты на перевозку 1 т. зерна (тыс. руб.) | | | Количества зерна в хозяйствах, т. |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | |
| 1 | 0,6 | 0,7 | 1,0 | 1000 |
| 2 | 1,2 | 1,8 | 0,9 | 700 |
| 3 | 1,7 | 0,6 | 2,1 | 900 |
| 4 | 2,3 | 1,5 | 1,4 | 1300 |
| 5 | 1,4 | 1,1 | 0,6 | 500 |
| Емкость элеваторов, т. | 1200 | 1500 | 2000 | |

Таблица 2.7

Известные показатели из примера о перевозке зерна

| Элеваторы | Мелькомбинаты, затраты на перевозку 1 т. зерна (тыс. руб.) | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1,0 | 1,2 | 1,6 | 2,2 |
| 2 | 0,8 | 0,6 | 0,7 | 1,3 |
| 3 | 1,8 | 2,3 | 1,1 | 1,9 |
| Потребность в продукции мелькомбинатов, т. | 1400 | 1100 | 500 | 600 |

Составить оптимальные маршруты закрепления хозяйств к элеваторам и элеваторов к мелькомбинатам, позволяющие минимизировать суммарные затраты на перевозку зерна.

Если суммарное количество продукции у поставщиков равно суммарной емкости промежуточных пунктов и равно суммарному спросу конечных потребителей, то такую задачу можно решить по частям. Если хотя бы одно из этих равенств не соблюдается, то задачу целесообразно решить как одну единую. Ниже проведенная таблица иллюстрирует методику преобразования двухэтапной задачи в одноэтапную:

- в качестве поставщиков рассмотрены все пять хозяйств и все три элеватора, а в качестве потребителей все три элеватора и все четыре мелькомбината;
- величина критерия оптимальности (затраты на перевозку 1 т зерна по перевозкам «хозяйства→элеваторы» и «элеваторы →мелькомбинаты») соответствуют заданным по условиям задачи;

- количество зерна в хозяйствах, емкость элеваторов и спрос мелькомбинатов также соответствуют их величинам, заданным по условию задачи;
- затраты на перевозку 1 т зерна от каждого хозяйства до каждого мелькомбината приняты значительно большими, чем по реальным маршрутам (это позволить исключить перевозки по маршрутам «хозяйства → мелькомбинаты»), например, равным 1000 тыс. руб.;
- затраты на перевозку 1 т зерна по маршрутам «элеватор N→ элеватор M» (N≠M) также приняты значительно большими, чем по реальным маршрутам (перевозки зерна от одного элеватора к другому с экономической точки зрения бессмысленны);
- затраты на перевозку 1 т. зерна по маршрутам «элеватор 1→ элеватор1», «элеватор2→элеватор2», «элеватор3→элеватор3» приняты равными нулю (перевезти зерна с элеватора 1 на элеватор 1 означает, что зерно с этого элеватора не перевозится никуда, т.е. остается на данном элеваторе не вывезенным, следовательно нет и затрат на перевозку, т.е. затраты на перевозку равны нулю).

После преобразования двухэтапная задача превратилась в обычную одноэтапную задачу транспортного типа.

Таблица 2.8

Методика преобразования двухэтапной задачи в одноэтапную

| | Элеваторы | | | Мелькомбинаты | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| Хозяйства<br>1 | 0,6 | 0,7 | 1,0 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 |
| 2 | 1,2 | 1,8 | 0,9 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 700 |
| 3 | 1,7 | 0,6 | 2,1 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 900 |
| 4 | 2,3 | 1,5 | 1,9 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 1300 |
| 5 | 1,4 | 1,1 | 0,6 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 500 |
| Элеваторы | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 1000 | 1000 | 10 | 12 | 16 | 22 | 1200 |
| 2 | 1000 | 0 | 1000 | 0,8 | 0,6 | 0,7 | 1,3 | 1500 |
| 3 | 1000 | 1000 | 0 | 1,8 | 2,3 | 1,1 | 1,9 | 2000 |
| | 1200 | 1500 | 2000 | 1400 | 1100 | 500 | 600 | |

В заключении перечислим этапы построения модели многоэтапных задач транспортного типа:

- формулировка задачи и выбор объекта;
- проверка условия равенства суммарного объема продукции у поставщиков емкости промежуточных пунктов и суммарному спросу конечных потребителей (если они равны, то задачу решают по частям, если же равенство нарушается, то задачу надо преобразовать в одноэтапную);
- проверка на открытость;
- учет пропускной способности по отдельным маршрутам;
- определение перечня переменных;
- определение перечня ограничений;
- выбор критерия оптимальности;

- математическая запись модели;
- решение задач на ЭВМ;
- анализ результатов;
- принятие плана перевозок к реализации.

## Тема 3. Методы решения задач математического программирования

### 3.1. Графический метод. Симплекс метод.

Методы решения экономических задач оптимизационного типа с помощью инструментария линейного программирования рассмотрим на примере задачи по оптимизации ассортимента продукции. Формулировка задачи ассортимента продукции

На предприятии имеется четыре вида сырья, из которых вырабатывается два вида продукции. Объем каждого вида сырья и нормы их расхода на производство единицы продукции, а также прибыль на единицу продукции приведены в таблице 3.1.

Требуется составить оптимальный план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Построение модели по оптимизации ассортимента продукции

1 этап - определение перечня переменных:

$x_1$ – объем продукции вида А, единиц;

$x_2$ - объем продукции вида Б, единиц.

2 этап - определение перечня ограничений:

1,2,3,4 - ограничения на объем сырья каждого из четырех видов соответственно;

6,7 – ограничения на не отрицательность переменных.

Таблица 3.1

Исходная информация к задаче ассортимента продукции

| Виды сырья | Норма расхода | | Объем сырья, единиц |
|---|---|---|---|
| | А | Б | |
| 1 | 1 | 3 | 18 |
| 2 | 2 | 1 | 16 |
| 3 | - | 1 | 5 |
| 4 | 3 | - | 21 |
| Прибыль на единицу продукции | 2 | 3 | |

3 этап - выбор критерия оптимальности: max прибыли от реализации продукции.

4 этап - математическая запись модели.

Найти решение $\{x_1, x_2\}$, позволяющее максимизировать функцию прибыли $F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$ (3.1), при условиях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5 \\ 3x_1 \le 21 \end{cases} \qquad (3.2)$$

$$x_1 \ge 0; \qquad x_2 \ge 0 \qquad (3.3)$$

Геометрический метод решения этой задачи линейного программирования можно рассмотреть в 2 этапа:

1 этап. Отображение области допустимых решений

Рассмотрим неравенство $x_1 + 3x_2 \le 18$. Область, удовлетворяющая тому условию, будет лежать по одну из сторон прямой линии $x_1 + 3x_2 = 18$. Чтобы определить, по какую сторону этой линии находится участок, достаточно взять одну точку и определить отвечает она или нет условию $\le 18$. Аналогичным образом наносим области, отвечающие всем остальным ограничениям.

На рис. 3.1, построенному на основе линейных уравнений (I, II, …, VI) получен многранник области допустимых решений рассматриваемой оптимизационной задачи

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_1 + 3x_2 = 18$ | $(I)$ | $3x_1 = 21$ | $(IV)$ |
| $2x_1 + x_2 = 16$ | $(II)$ | $x_1 = 0$ | $(V)$ |
| $x_2 = 5$ | $(III)$ | $x_2 = 0$ | $(VI)$ |
| $2x_1 + 3x_2 \to \max$ | | $2x_1 + 3x_2 = 6$ | $(F_2)$ |
| $2x_1 + 3x_2 = 0$ | $(F_1)$ | $2x_1 + 3x_2 = 24$ | $(F_3)$ |

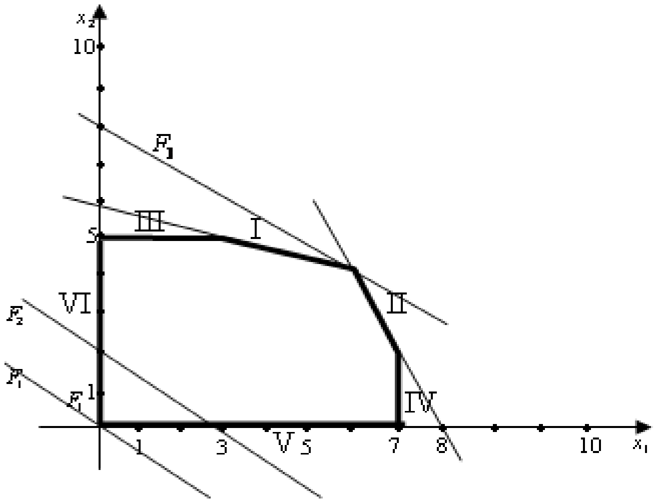


Рис. 3.1. Многранник области допустимых решений

2 этап. Оптимизация значения объективной функции.

Мы можем взять любую точку в области допустимых решений и вычислить соответствующую прибыль, таким образом найти точку, где F = max.

Вместо того чтобы рассматривать отдельные точки, мы можем применить более действенный метод. Рассмотрим конкретное значение прибыли $2x_1 + 3x_2 = 0 \quad (F_1)$ и нанесем её на график (рис. 3.1.2). Теперь рассмотрим большее значение прибыли $2x_1 + 3x_2 = 6 \quad (F_2)$ , полученная линия параллельна исходной линии (рис. 3.1). Тоже самое произойдет если нанести третью линию по другому значению прибыли. Как мы видим по мере увеличения прибыли линии все более удаляются от исходной точки графика $(x_1 = 0, x_2 = 0)$. Применив данный подходы, получим, что линия максимальной прибыли проходит через точку, указанную на графике $x_1 = 6, x_2 = 4, F = 24$.

Альтернативный метод можно использовать исходя из знания области допустимых значений. Известно, что оптимальное значение всегда находится в угловой точке области допустимых решений. На основании этих сведений оптимальное значение можно получить, просто вычислив значение объективной функции в каждой из угловых точек.

Симплекс–метод решения задачи линейного программирования основывается на построении расширенной системы. Расширенной называют исходную систему после ввода дополнительных переменных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n} + x_{n+1} = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n} + x_{n+2} = b_2; \\ ............................................... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn} + x_{n+m} = b_m; \\ F - c_1x_1 - c_2x_2 - ... - c_nx_n = 0. \end{cases} \qquad (3.4)$$

Предполагаем, что добавочные переменные имеют тот же знак, что и свободные члены; в противном случае используется так называемый m-метод. Составляем симплекс-таблицу (таблица 3.2)

Таблица 3.2

Симплекс таблица

| Базис | Свободный член | Переменные | | | | | | | Оценочные отношения |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_n$ | $x_{n+1}$ | … | $x_{n+m}$ | |
| $x_{n+1}$ | $b_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1n}$ | 1 | … | 0 | |
| $x_{n+2}$ | $b_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2n}$ | 0 | … | 0 | |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | |
| $x_{n+m}$ | $b_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | … | $a_{mn}$ | 0 | … | 1 | |
| F | 0 | $-c_1$ | $-c_2$ | … | $-c_n$ | 0 | … | 0 | |

В последней строке симплекс – таблицы указываются коэффициенты целевой функции с противоположным знаком (обозначим их $\bar{c}_j$), т.е. $\bar{c}_j = -c_j$

Алгоритм симплекс-таблицы рассмотрим на примере выше приведенной задачи об ассортименте продукции (таблица 3.3).

Таблица 3.3

Первая симплекс таблица

| Базис | Свободный член | Переменные | | | | | | Оценочные отношения |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
| $x_3$ | 18 | 1 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 18/3 |
| $x_4$ | 16 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 16/1 |
| $x_5$ | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5/21 ← q |
| $x_6$ | 21 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | (21/0) ∞ |
| F | 0 | -2 | -3<br>↑ s | 0 | 0 | 0 | 0 | |

Алгоритм построения симплекс-таблицы включает ряд этапов.

1 этап. Запишем для этой задачи первую симплекс-таблицу

2 этап. Проверяем выполнение критерия оптимальности. При решении задачи на max выполнение критерия оптимальности можно определить по наличии в последней строке симплекс-таблицы (F) отрицательных

коэффициентов для основных переменных (-$c_j$). Если таких нет, то решение оптимально и достигнуть max F.

3 этап. Если критерий оптимальности не выполнен (в примере он не выполнен), то наибольший отрицательный коэффициент $\bar{c}_j$ определяет разрешающий столбец $a_{is}$ (в примере это столбец 4).

Составляем оценочные отношения каждой строки по следующим правилам:

1) $\infty$, если $b_i$ и $a_{is}$ имеют разные знаки;

2) $\infty$, если $b_i$ = 0 и $a_{is} < 0$ $\infty$, если $a_{is}$ = 0;

3) 0, если $b_i$ =0 и $a_{is}$ > 0. $b_i = 0$ и

4) $\left|\dfrac{\mathrm{b_i}}{a_{is}}\right|$, если $b_i$ и $a_{is}$ имеют одинаковые знаки, где $a_{io}$ - второй столбец.

Определяем $\min\limits_j \left\{ \left| \dfrac{b_i}{a_{is}} \right| \right\}$. Если конечного min нет, то задача не имеет оптимума, т.е. $F_{\max} = \infty$. Если min конечен, то выбираем строку $q$, на которой он достигается (любую, если их несколько), и называем ее разрешающей строкой. На пересечении разрешающей строки и столбца находится решающий элемент $a_{qs}$.

4. этап. Переходим к следующей симплекс-таблице (таблица 3.4) соблюдая правила:

а) в левом столбце записываем новый базис: вместо основной переменной $x_q$ - переменную $x_s$;

б) в столбцах, соответствующих основным переменным проставляем нули и единицы: 1 – против «своей» основной переменной, 0 – против «чужой» основной переменной , 0 – в последней строке против всех основных переменных;

в) новую строку с номером q получаем из старой делением на разрешающий элемент $a_{qs}$;

г) все остальные элементы $a'_{ij}$ и $b'_i$ вычисляем по правилу прямоугольника (рис. 3.2) с помощью формул (3.5).

$$\begin{array}{ccccc} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{is} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{qj} & \cdots & a_{qs} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} a'_{ij} &= a_{ij} - \frac{a_{is} a_{qj}}{a_{qs}}; \\ b'_i &= b_i - \frac{a_{is} b_q}{a_{qs}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Рис. 3.2 Правило прямоугольника

Таблица 3.4

Вторая симплекс-таблица

| Базис | Свободный член | Переменные | | | | | | Оценочные отношения |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
| $x_3$ | 3 | 1 | 0 | 1 | 0 | -3 | 0 | 3 ← |
| $x_4$ | 11 | 2 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 11/2 |
| $x_2$ | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | (5/0) ∞ |
| $x_6$ | 21 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 21/3 |
| F | 15 | -2 ↑ | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | |

Далее переходим к этапу 2.

Проверяем выполнение критерия оптимальности для таблицы 3.4. Как видно из таблицы критерий оптимальности вновь не выполнен. Поэтому повторяем итерацию. Теперь первый столбец разрешающий; $x_1$ – переходит в основные, $\min\{3/1;11/2;\infty;7\}=3$; первая строка разрешающая, $a_{11}$- разрешающий элемент. Новая симплекс-таблица примет вид (табл. 3.5).

Таблица 3.5

Третья симплекс-таблица

| Базис | Свободный член | Переменные | | | | | | Оценочные отношения |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
| $x_1$ | 3 | 1 | 0 | 1 | 0 | -3 | 0 | ∞ |
| $x_4$ | 5 | 0 | 0 | -2 | 1 | 5 | 0 | 5/5← |
| $x_2$ | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5/1 |
| $x_6$ | 12 | 0 | 0 | -3 | 0 | 9 | 1 | 12/9 |
| F | 21 | 0 | 0 | 2 | 0 | -3 ↑ | 0 | |

И на этот раз критерий оптимальности не выполнен; пятый столбец и вторая строка разрешающие, $a_{25}=5$- разрешающий элемент.

Переходим к четвертой симплекс-таблице (табл. 3.6)

Таблица 3.6

Четвертая симплекс таблица

| Базис | Свободный член | Переменные | | | | | | Оценочные отношения |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
| $x_1$ | 6 | 1 | 0 | -1/5 | 3/5 | 0 | 0 | |
| $x_5$ | 1 | 0 | 0 | -2/5 | 1/5 | 1 | 0 | |
| $x_2$ | 4 | 0 | 1 | 2/5 | -1/5 | 0 | 0 | |
| $x_6$ | 3 | 0 | 0 | 3/5 | -9/5 | 0 | 1 | |
| F | 24 | 0 | 0 | 4/5 | 3/5 | 0 | 0 | |

Критерий оптимальности выполнен. Получено следующее оптимальное решение: $x_1=6; x_2=4; x_5=1; x_6=3$. Значение показателя $(F)$, принятого за критерий оптимальности, равно 24.

Решение совпадает с ранее полученным геометрическим методом.

### 3.2. Решение на ПЭВМ задач линейного программирования.

Реальные экономические задачи оптимизационного типа вручную невозможно решить в силу их большой размерности. По мнению одного из известных советских экономистов-математиков в области агропромышленного комплекса Блажа И.Д., для ручного решения оптимизационной задачи, содержащей 150 переменных и 100 условий-ограничений опытному математику потребуется 30 лет. В экономической практике такие задачи считаются небольшими.

Сам Блаж И.Д. решал задачи с 1000 переменными и 700-800 условиями-ограничениями. Разработаны и широко распространены программные средства, позволяющие решать такие задачи на ЭВМ, в т.ч. на ПЭВМ. В частности, в электронных таблицах MS Excel содержится инструментарий для решения оптимизационных задач под названием «Поиск решений…».

Пусть на предприятии имеется четыре вида сырья, из которых вырабатываются пять видов продукции. Известны: объем сырья каждого вида, нормы расхода сырья на производство каждого вида продукции, а также прибыль, получаемой от реализации единицы продукции каждого вида. При этом объем сырья измеряется в тоннах, нормы расхода – в кг, объем продукции – в штуках, прибыль – в тыс. руб.

Требуется составить оптимальный ассортиментный план, позволяющий предприятию max экономический эффект, т.е. max суммарную величину прибыли. Все исходные данные приведены в таблице 3.7

Таблица 3.7

Исходные данные к задаче ассортимента продукции

| Виды сырья | Нормы расхода, кг | | | | | Объем сырья, т |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | А | Б | В | Г | Д | |
| 1 | 51 | | 34 | | 23 | 7,0 |
| 2 | 15 | 53 | 26 | 52 | 27 | 10,0 |
| 3 | | 11 | | 16 | 10 | 1,5 |
| 4 | 5 | 6 | 8 | 10 | 7 | 2,0 |
| Прибыль на ед. продукции, тыс. руб. | 4,4 | 5,0 | 3,6 | 3,1 | 3,5 | |

Определим перечень переменных, т.е. обозначим искомый объем продукции видов А,Б,В,Г,Д (в штуках) соответственно через $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$.

Ограничений (соответственно видам сырья) в задаче четыре. Обозначим их: 1,2,3,4. В качестве критерия оптимальности по условию задачи выбрана прибыль. Математическая модель записывается следующим образом.

Найти оптимальное решение $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$., позволяющее max суммарную величину прибыли

$$F = 4{,}4x_1 + 5{,}0x_2 + 2{,}6x_3 + 3{,}1x_4 + 3{,}5x_5,$$

при условиях:

а) соблюдения ограничений на использование каждого из 4-х видов сырья

$$1x_1 + 0x_2 + 34x_3 + 0x_4 + 23x_5 \le 7000$$

$$5x_1 + 53x_2 + 26x_3 + 52x_4 + 27x_5 \le 10000$$

$$0x_1 + 11x_2 + 0x_3 + 16x_4 + 10x_5 \le 1500$$

$$5x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 + 7x_5 \le 2000$$

б) соблюдения условий по неотрицательности всех переменных $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0$.

Построение модели задачи по оптимизации ассортимента продукции завершено. Остается выполнить расчеты на ПЭВМ, анализировать результаты и найти приемлемый для практической реализации план.

Перейдем к рассмотрению методики решения оптимизационных задач на ПЭВМ с помощью инструментария «Поиск решения…» MS Excel.

В процедуре «Поиска решений…» MS Excel используются алгоритмы симплекс-метода и метода «branch-and-bound» для решения линейных и целочисленных задач с ограничениями. Работа в процедуре «Поиска решений …» осуществляется следующим образом:

1. В окне Excel создается исходная таблица (в нашем примере таблица 3.8).

Таблица 3.8

Исходная таблица для работы с инструментом «Поиск решений…»

| | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | Расч. знач. величины огран-я | Величина огран-я |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 51 | | 34 | | 23 | $\sum a_{1j}X_j$ | 7000 |
| 2 | 15 | 63 | 26 | 52 | 27 | $\sum a_{2j}X_j$ | 10000 |
| 3 | | 11 | | 16 | 10 | $\sum a_{3j}X_j$ | 1500 |
| 4 | 5 | 6 | 8 | 10 | 7 | $\sum a_{4j}X_j$ | 2000 |
| F | 4,4 | 5,0 | 2,6 | 3,1 | 3,5 | $\sum C_jX_j$ | |
| Оптимальное решение | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |

2. Вводятся формулы для вычисления:

а) расчетных значений по каждому ограничению (потребность сырья каждого вида по оптимальному решению), т.е. $\sum_{j=1}^{5} a_{ij} X_j,\ i = 1,2,3,4$;

б) суммарной величины критерия оптимальности, т.е. $\sum_{j=1}^{5} C_j X_j$;

3. для переменных $X_j$ в строку оптимальное решение вводятся нулевые значения;

4. запускается процедура «Поиск решения» (Сервис → Поиск решения). Появляется окно «Поиск решения» (рис. 3.3).

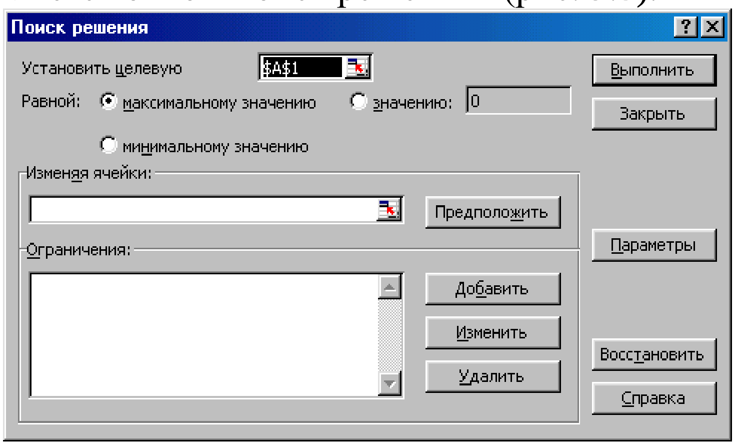


Рис. 3.3. Окно «Поиск решения» MS Excel

5. В окне «Поиск решения» следует выполнить следующие действия:

а) установить целевую ячейку, т.е. указать адрес ячейки, куда будет выведена суммарная величина критерия оптимальности;

б) выбрать указатель цели, т.е. max, min или ноль;

в) ввести изменяемую ячейку, т.е. указать диапазон для вывода результата решения (напомним, что первоначально все переменные принимаются равными нулю);

г) ввести ограничения (с помощью кнопки «добавить»);

д) запустить задачу на решение (выбор кнопки «выполнить»).

После завершения решения на экран выводится окно «Результаты поиска решения» (рис. 3.4).

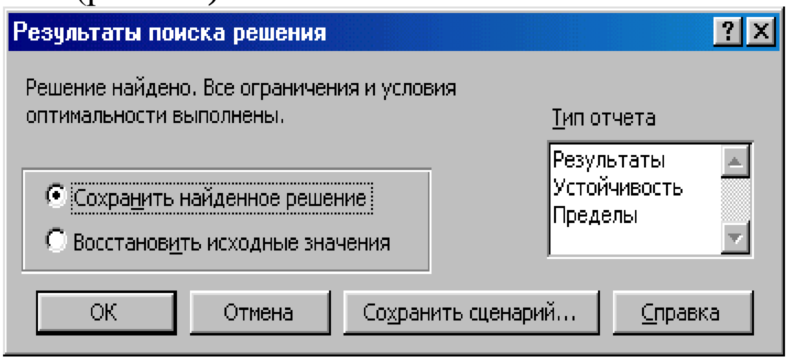


Рис. 3.4. Окно «Результаты поиска оптимального решения» MS Excel

Это окно используется для вывода итогового сообщения и найденного решения. MS Excel позволяет создать три типа отчетности по итогам поиска решения (рис. 3.5), называемые соответственно «Результаты», «Устойчивость», «Пределы».

«Результаты» (рис. 3.5а) представляет собой отчет, состоящий из целевой ячейки (критерия оптимальности) и списка влияющих ячеек модели (оптимального решения), их исходных и конечных значений, а также формул ограничений и дополнительных сведений о наложенных ограничениях.

«Устойчивость» (3.5б) - это отчет, содержащий сведения о чувствительности решения к малым изменениям в формуле модели: решение, ограничения и двойственные оценки (нормированный градиент (для переменных), множитель Лагранжа (для ограничений)).

Отчет «Пределы» (3.5в) состоит из целевой ячейки, критерия оптимальности и списка влияющих ячеек модели (переменных), их значений, а также нижних и верхних границ. Нижним пределом является наименьшее значение, которое может содержать влияющая ячейка при условии фиксированности значений остальных ячеек и их удовлетворения наложенным ограничениям. Соответственно верхним пределом называется наибольшее значение.

Для поставленной нами выше задачи по оптимизации ассортимента продукции получено следующее оптимальное решение (таблица 3.9). При этом суммарная величина прибыли (критерия оптимальности) равна 1041,3 тыс. руб., все виды сырья используются в полном объеме.

Таблица 3.9

Оптимальное решение задачи ассортимента продукции

| Виды продукции | Обозначение | Объем продукции, шт. | При x>10 |
|---|---|---|---|
| А | $X_1$ | 29 | 38 |
| Б | $X_2$ | 75 | 72 |
| В | $X_3$ | 117 | 112 |
| Г | $X_4$ | | 10 |
| Д | $X_5$ | 68 | 55 |

Обратите внимание! Продукция вида Г не вошла в решение, хотя по критерию оптимальности (прибыли) ее производство выгоднее, чем продукции В. Продукция В по прибыльности уступает всем остальным, но в соответствии с оптимальным решением ее должно быть произведено в наибольшем объеме.

Целевая ячейка (Максимум)

| Ячейка | Имя | Исходно | Результат |
|---|---|---|---|
| $G$5 | | 0 | 1041,265619 |

Изменяемые ячейки

| Ячейка | Имя | Исходно | Результат |
|---|---|---|---|
| $A$6 | | 0 | 28,97478917 |
| $B$6 | | 0 | 74,66113294 |
| $C$6 | | 0 | 116,5062475 |
| $D$6 | | 0 | 0 |
| $E$6 | | 0 | 67,87275376 |

Ограничения

| Ячейка | Имя | Значение | формула | Статус | Разница |
|---|---|---|---|---|---|
| $F$1 | | 7000 | $F$1<=$G$1 | связанное | 0 |
| $F$2 | | 10000 | $F$2<=$G$2 | связанное | 0 |
| $F$3 | | 1500 | $F$3=$G$3 | не связан. | 0 |
| $F$4 | | 2000 | $F$4=$G$4 | связанное | 0 |
| $A$6 | | 28,97478917 | $A$6>=0 | не связан. | 28,97478917 |
| $B$6 | | 74,66113294 | $B$6>=0 | не связан. | 74,66113294 |
| $C$6 | | 116,5062475 | $C$6>=0 | не связан. | 116,5062475 |
| $D$6 | | 0 | $D$6>=0 | связанное | 0 |
| $E$6 | | 67,87275376 | $E$6>=0 | не связан. | 67,87275376 |

Отчет по результатам (а)

Изменяемые ячейки

| Ячейка | Имя | Результ. значение | Нормир. градиент |
|---|---|---|---|
| $A$6 | | 28,97478917 | 0 |
| $B$6 | | 74,66113294 | 0 |
| $C$6 | | 116,5062475 | 0 |
| $D$6 | | 0 | -0,165061317 |
| $E$6 | | 67,87275376 | 0 |

Ограничения

| Ячейка | Имя | Результ. значение | Лагранжа Множитель |
|---|---|---|---|
| $F$1 | | 7000 | 0,097017534 |
| $F$2 | | 10000 | 0,089017177 |
| $F$3 | | 1500 | 0,150154543 |
| $F$4 | | 2000 | -0,376630356 |

Отчет по устойчивости (б)

| Ячейка | Имя | Целевое значение |
|---|---|---|
| $G$5 | | 1041,2656 |

| Ячейка | Имя | Изменяемое значение | Нижний предел | Целевое результат | Верхний предел | Целевое результат |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$6 | | 28,974789 | 28,9748 | 1041,2656 | 28,97479 | 1041,2656 |
| $B$6 | | 74,661133 | 74,6611 | 1041,2656 | 74,66113 | 1041,2656 |
| $C$6 | | 116,50625 | 116,506 | 1041,2656 | 116,5062 | 1041,2656 |
| $D$6 | | 0 | 0 | 1041,2656 | 0 | 1041,2656 |
| $E$6 | | 67,872754 | 67,8728 | 1041,2656 | 67,87275 | 1041,2656 |

Отчет по пределам (в)

Рис. 3.5. Отчетность, создаваемая инструментарием «Поиск решения…» MS Excel

Оптимизационные модели, как впрочем, и другие, позволяют проводить имитационные эксперименты. Например, как изменятся оптимальное решение и целевая функция, если включить в модель ограничение по производству продукции вида Г в объеме не менее 10 штук, т.е. $x_4 \geq 10$ . Решение изменилось кардинально. Результаты см. в таблице (3.9) последний столбец

Общая величина прибыли при этом составила 1039,6 тыс. руб., все виды сырья также используются в полном объеме.

## 3.3. Двойственные задачи линейного программирования и их свойства.

Каждой задаче линейного программирования соответствует другая задача, называемая двойственной или сопряженной по отношению к исходной. Экономико-математические модели и содержательная интерпретация прямой и двойственной задач линейного программирования приведены в таблице 3.10.

Если прямая задача представляет собой задачу ассортимента продукции, то $X_j; (j = 1,2,...,n)$ – искомый объем продукции $j$ – го вида;

$C_j$ – цена единицы $j$ – й продукции;

$a_{ij}$ – нормы расхода $i$-го вида сырья, идущие на производство продукции.

Тогда $y_i (i = 1,2,...,m)$ в двойственной задаче представляет собой цену $i$-го ресурса.

Цены ресурсов $y_1, y_2,..., y_m$, в экономической литературе получили различные названия: учетные, неявные, теневые. Смысл этих названий состоит в том, что это условные, "ненастоящие" цены. В отличие от "внешних" цен $c_1, c_2,..., c_n$ на продукцию, известных, как правило, до начала производства, цены ресурсов $y_1, y_2,..., y_m$ являются внутренними, ибо они задаются не извне, а определяются непосредственно в результате решения задачи, поэтому их чаще называют оценками ресурсов.

Прямая и двойственная задачи линейного программирования, представленные в табл. 3.10, обладают следующими свойствами:

– в одной задаче ищут максимум линейной функции, в другой – минимум;

Таблица 3.10

Прямая и двойственная задача линейного программирования

| Задача I (прямая) | Задача II (двойственная) |
|---|---|
| $F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max$<br>при ограничениях:<br>$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$<br>и условии неотрицательности<br>$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0$<br>Составить такой план выпуска продукции $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, при котором прибыль (выручка) от реализации продукции будет максимальной при условии, что потребление ресурсов по каждому виду продукции не превзойдет имеющихся запасов | $Z = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \to \min$<br>при ограничениях:<br>$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y1 \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_2 \ge c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \ge c_m, \end{cases}$<br>и условии неотрицательности<br>$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, \dots, y_m \ge 0,$<br>Найти такой набор цен (оценок) ресурсов $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$, при котором общие затраты на ресурсы будут минимальными при условии, что затраты на ресурсы при производстве каждого вида продукции будут не менее прибыли (выручки) от реализации этой продукции |

– коэффициенты при переменных в линейной функции одной задачи являются свободными членами системы ограничений в другой;

– каждая из задач задана в стандартной форме, причем в задаче максимизации все неравенства вида "≤", а в задаче минимизации - все неравенства вида "≥";

– матрицы коэффициентов при переменных в системах ограничений обеих задач являются транспонированными друг к другу;

– число неравенств в системе ограничений одной задачи совпадает с числом переменных в другой задаче;

– условия неотрицательности переменных имеются в обеих задачах.

Две задачи I и II линейного программирования, обладающие указанными свойствами, называются симметричными взаимно двойственными задачами. В дальнейшем для простоты будем называть их просто двойственными задачами.

Алгоритм составления двойственной задачи является следующим:

– все неравенства системы ограничений исходной задачи приводятся к одному смыслу: если в исходной задаче ищут максимум линейной функции, то все неравенства системы ограничений привести к виду "≤", а если минимум - к виду "≥". Для этого неравенства, в которых данное требование не выполняется, умножить на –1;

– составляется расширенная матрица системы $A_1$, в которую включается матрица коэффициентов при переменных *A,* столбец свободных членов системы ограничений и строку коэффициентов при переменных в линейной функции;

– находят матрицу $A_1'$, транспонированную к матрице;

– $A_i$- сформулируется двойственная задача на основании полученной матрицы $A_1'$ и условия неотрицательности переменных.

Связь между оптимальными решениями двойственных задач устанавливается с помощью теорем двойственности.

Основное неравенство теории двойственности. Для любых допустимых решений $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ исходной и двойственной задач справедливо неравенство:

$F(X) \le Z(Y)$ или $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$. (3.6)

Рассмотрим признаки оптимальности решений.

Справедливы следующие теоремы о двойственности (приведем без доказательства)

Теорема о достаточном признаке оптимальности. Если $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ $Y^* = (y_1,^* y_2^*, ..., y_m^*)$ допустимые решения взаимно двойственных задач, для которых выполняется равенство:

$F(X^*) = Z(Y^*)$, (3.7)

то $X^*$- оптимальное решение исходной задачи I, а $Y^*$- двойственной задачи II.

Первая (основная) теорема двойственности. Если одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение, то его имеет и другая, причем оптимальные значения их линейных функций равны:

$F_{\max} = Z_{\min}$ или $F(X^*) = Z(Y^*)$. (3.8)

Если линейная функция одной из задач не ограничена, то условия другой задачи противоречивы.

Из первой части утверждения теоремы следует, что равенство (3.7) является не только достаточным признаком оптимальности решений (приведен выше), но и необходимым признаком оптимальности решений взаимно двойственных задач.

Экономический смысл первой (основной) теоремы двойственности. План производства $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ и набор цен (оценок) ресурсов $Y^* = (y_1,^* y_2^*, ..., y_m^*)$ оказываются оптимальными тогда и только тогда, когда прибыль (выручка) от продукции, найденная при "внешних" (известных заранее) ценах $c_1, c_2, ..., c_n$ равна затратам на ресурсы по "внутренним" (определяемым только из решения задачи) ценам $y_1, y_2, ..., y_m$. Для всех же других планов $X$ и $Y$ обеих задач в соответствии с основным неравенством (2.3.1) теории двойственности прибыль (выручка) от продукции всегда меньше (или равна) затрат на ресурсы.

Экономический смысл первой теоремы двойственности можно интерпретировать и так: предприятию безразлично, производить ли продукцию по оптимальному плану $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ и получить максимальную прибыль (выручку) $F_{\max}$ либо продавать ресурсы по оптимальным ценам $Y^* = (y_1,^* y_2^*, ..., y_m^*)$ и возместить от продажи равные ей минимальные затраты на ресурсы $Z_{\min}$.

Вторая теорема двойственности. Если каждую из двух взаимно двойственных задач решать симплексным методом, то необходимо привести их к каноническому виду, для чего в систему ограничений задачи I следует ввести $m$ неотрицательных переменных $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+i}, ..., x_{n+m}$, а в систему ограничений задачи II -$n$ неотрицательных переменных $y_{m+1}, y_{m+2}, ..., y_{m+j}, ..., y_{n+m}$, где *i(j)* - номер неравенства, в которое введена дополнительная переменная $x_{n+i} \geq 0$ $(y_{m+j} \geq 0)$.

Системы ограничений каждой из взаимно двойственных задач примут вид:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \; i = \overline{1,m} \quad (3.9)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - y_{m+j} = c_j, \qquad j = \overline{1,n}.$$

Установим соответствие между первоначальными переменными одной из двойственных задач и дополнительными переменными другой задачи (таблица 3.11).

Таблица 3.11

Соответствие между переменными прямой и двойственной задачи

| Переменные исходной задачи I | |
|---|---|
| Первоначальные | Дополнительные |
| $x_1$ $x_2$ … $x_j$ … $x_n$<br>↕ ↕ ↕ ↕<br>$y_{m+1} y_{m+2}$… $y_{m+j}$…$y_{m+n}$ | $x_{n+1}$ $x_{n+2}$ … $x_{n+i}$ … $x_{n+m}$<br>↕ ↕ ↕ ↕<br>$y_1$ $y_2$ … $y_j$ … $y_m$ |
| Дополнительные | Первоначальные |
| Переменные двойственной задачи II | |

Справедлива теорема: положительным (ненулевым) компонентам оптимального решения одной из взаимно двойственных задач соответствуют нулевые компоненты оптимального решения другой задачи, т.е. для любых $i = \overline{1,m}$ и $j = \overline{1,n}$: если $x_j^* > 0$, то $y_{m+j}^* = 0$; если $x_{n+i}^* > 0$, то $y_i^* = 0$, и аналогично, если $y_i^* > 0$, то $x_{n+i}^* = 0$; если $y_{m+j}^* > 0$, то $x_j^* = 0$.

Рассмотренная теорема является следствием второй теоремы о двойственности, которая формулируется следующим образом: компоненты оптимального решения двойственной задачи равны абсолютным значениям коэффициентов при соответствующих переменных линейной функции исходной задачи, выраженной через неосновные переменные ее оптимального решения.

Компоненты оптимального решения двойственной задачи называются оптимальными (двойственными) оценками исходной задачи. Академик Л.В. Канторович назвал их объективно обусловленными оценками.

Для выяснения смысла этих оценок рассмотрим модель задачи об ассортименте, приведенной выше, и модель двойственной задачи. Компоненты оптимальных решений этих задач, приведенные в таблице 3.12.

Таблица 3.12

Компоненты оптимальных решений прямой и двойственной задачи

| ***Прямая задача*** | ***Двойственная задача*** |
|---|---|
| $F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$<br>при условиях:<br>$x_1 + 3x_2 \leq 18$;<br>$2x_1 + x_2 \leq 16$;<br>$x_2 \leq 5$;<br>$3x_1 \leq 21$;<br>$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$. | $Z = 18y_1 + 16y_2 + 5y_3 + 21y_4 \to \min$<br>при условиях:<br>$y_1 + 2y_2 + 3y_4 \geq 2$;<br>$3y_1 + y_2 + y_3 \geq 3$;<br>$y_1 \geq 0$; $y_2 \geq 0$; $y_3 \geq 0$; $y_4 \geq 0$. |
| Решение<br>$x_1 = 6$; $x_2 = 4$; $x_3 = 0$;<br>$x_4 = 0$; $x_5 = 1$; $x_6 = 3$; $F = 24$,<br>где $x_3,x_4,x_5,x_6$ – неосновные переменные | $y_1 = 4/5$; $y_2 = 3/5$; $y_3 = 0$;<br>$y_4 = 0$; $y_5 = 0$; $y_6 = 0$; $Z = 24$,<br>где $y_5$, $y_6$ – неосновные переменные |

В таблице 3.13 дополнительные (неосновные) переменные исходной задачи I $x_3, x_4, x_5, x_6$, выражают остатки ресурсов, а дополнительные (неосновные) переменные двойственной задач II $y_5, y_6$, выражают превышение затрат над ценой.

Ресурсы $S_1$, $S_2$ по оптимальному плану полностью использованы $\left(x_3^* = 0; x_4^* = 0\right)$, объективно обусловленные оценки этих ресурсов ненулевые $\left(y_1^* = 4/5; y_2^* = 3/5\right)$. Ресурсы $S_3, S_4$ не полностью используются в оптимальном плане $\left(x_5^* = 1, x_6^* = 3\right)$ и объективно обусловленные оценки этих ресурсов нулевые $\left(y_3^* = 0, y_4^* = 0\right)$.

Таблица 3.13

Соответствие компонентов оптимальных решений прямой и двойственной задачи

<table>
<tr><td colspan="6">Компоненты оптимального решения исходной задачи</td></tr>
<tr><td colspan="2">Число единиц продукции</td><td colspan="4">остатки ресурсов, единиц</td></tr>
<tr><td>$P_1$</td><td>$P_2$</td><td>$S_1$</td><td>$S_2$</td><td>$S_3$</td><td>$S_4$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x_1^*=6$ $x_2^*=4$<br>$\updownarrow$ $\updownarrow$<br>$y_5^*=0$ $y_6^*=0$</td><td colspan="4">$x_3^*=0$ $x_4^*=0$ $x_5^*=1$ $x_6^*=3$<br>$\updownarrow$ $\updownarrow$ $\updownarrow$ $\updownarrow$<br>$y_1^*=4/5$ $y_2^*=3/5$ $y_3^*=0$ $y_4^*=0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Превышение затрат на ресурсы над ценой реализации</td><td colspan="4">Объективно обусловленные оценки ресурсов (условные цены ресурсов)</td></tr>
<tr><td colspan="6">Компоненты оптимального решения двойственной задачи II</td></tr>
</table>

Таким образом, объективно обусловленные оценки ресурсов определяют степень их дефицитности: по оптимальному плану производства дефицитные (т.е. полностью используемые) ресурсы получают ненулевые оценки, а недефицитные - нулевые оценки.

По оптимальному плану в исходной задаче следует производить оба вида продукции $\left(x_1^* = 6, x_2^* = 4\right)$ и превышение затрат на ресурсы над ценой реализации равно нулю $\left(y_5^* = 0, y_6^* = 0\right)$. Если бы затраты на ресурсы превышали цену изготавливаемой из них продукции, оптимальное значение соответствующей переменной $x_2^* = 0$, и в этом случае по оптимальному плану производить эту продукцию не следовало.

Для выяснения того, что показывают численные значения объективно обусловленных оценок ресурсов, рассмотрим третью теорему двойственности: компоненты оптимального решения двойственной задачи равны значениям частных производных линейной функции $Z_{\min}(b_1, b_2, ..., b_m)$ по соответствующим аргументам, т.е.

$$\frac{\partial Z_{\min}}{\partial b_i} = y_i^*, \ \ (i = 1, 2, ..., m).$$

Откуда $y_i^* = \dfrac{\Delta Z_{\min}}{\Delta b_i}$. (3.10)

Из соотношения (3.10) следует, что объективно обусловленные оценки ресурсов показывают, на сколько денежных единиц изменится максимальная прибыль (выручка) от реализации продукции при изменении запаса соответствующего ресурса на одну единицу.

Двойственные оценки могут служить инструментом анализа и принятия правильных экономических решений. Так, например, с помощью объективно обусловленных оценок ресурсов можно сопоставить оптимальные условные затраты и результаты производства.

Объективно обусловленные оценки ресурсов позволяют судить об эффекте не любых, а лишь сравнительно небольших изменений ресурсов.

По соотношениям объективно обусловленных оценок могут быть определены расчетные нормы заменяемости ресурсов, при соблюдении которых проводимые замены в пределах устойчивости двойственных оценок не влияют на эффективность оптимального плана.

## Модуль II Усложненные методы математического программирования. Моделирование управленческих решений в экономике

## Тема 4. Задачи целочисленного и нелинейного программирования в экономике

### 4.1. Формулировка и методы решения задачи линейного целочисленного программирования

В значительной части экономических задач, относящихся к задачам линейного программирования, компоненты решения выражаются в целых числах, т.е. является целочисленными. К ним относятся, например, задачи, в которых переменные означают количество единиц неделимой продукции, число станков при загрузке оборудования, число турбин в энергосистеме, число вычислительных машин в управляющем комплексе и др.

Задача линейного целочисленного программирования формулируется следующим образом: найти решение (план) $X = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, при котором линейная функция

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad (4.1)$$

принимает максимальное или минимальное значение при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i = 1,2,...,m; \quad (4.2)$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1,2,..,n; \quad (4.3)$$

$x_j$ - целые числа. (4.4)

Условие целочисленности (4.4), добавляемое к обычным задачам линейного программирования, существенно усложняет ее решение.

Для решения задач линейного целочисленного программирования используется ряд методов. Наиболее простой из них - обычный метод линейного программирования. В случае если компоненты оптимального решения оказываются нецелочисленными, их округляют до ближайших целых чисел. Этот метод применяют тогда, когда отдельная единица совокупности составляет малую часть объема всей совокупности. В противном случае округление может привести к неоптимальному целочисленному решению, поэтому используют специально разработанные методы.

Методы целочисленной оптимизации можно разделить на три основные группы: методы отсечения, комбинаторные методы, приближенные методы.

Ограничимся рассмотрением методов отсечения.

Сущность методов отсечения состоит в том, что сначала задача решается без условия целочисленности. Если полученный план целочисленный, задача решена, в противном случае к ограничениям задачи добавляется новое ограничение, обладающее следующими свойствами:

- оно должно быть линейным;
- должно отсекать найденный оптимальный нецелочисленный план;

– не должно отсекать ни одного целочисленного плана.

Дополнительное ограничение, обладающее указанными свойствами, называется правильным отсечением.

Далее задача решается с учетом нового ограничения. После этого в случае необходимости добавляется еще одно ограничение и т. д.

## 4.2. Метод Гомори.

Один из алгоритмов решения задачи линейного целочисленного программирования (4.2)-(4.4), предложенный Гомори, основан на симплексном методе и использует достаточно простой способ построения правильного отсечения.

Пусть задача линейного программирования (4.1)-(4.3) имеет конечный оптимум и на последнем шаге ее решения симплексным методом получены следующие уравнения, выражающие основные переменные $x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_m$ через неосновные переменные $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_{m+i}, ..., x_n$ оптимального решения так, что оптимальным решением задачи (4.1)-(4.3) является $X^* = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_i, .., \beta_m, 0, 0, ..., 0)$, в котором, например $\beta_i$- нецелая компонента.

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - \alpha_{1m+1} x_{m+1} - ... - \alpha_{1n} x_n, \\ x_2 = \beta_2 - \alpha_{2m+1} x_{m+1} - ... - \alpha_{2n} x_n, \\ .................................................... \\ x_i = \beta_i - \alpha_{im+1} x_{m+1} - ... - \alpha_{in} x_n, \qquad (4.5) \\ .................................................... \\ x_m = \beta_m - \alpha_{mm+1} x_{m+1} - ... - \alpha_{mn} x_n, \end{cases}$$

В этом случае можно доказать, что неравенство

$$\{\beta_i\} - \{\alpha_{im+1}\} x_{m+1} - ... - \{\alpha_{in}\} x_n \le 0, \ (4.6)$$

сформированное по i-му уравнению системы (4.5), обладает всеми свойствами правильного отсечения.

Для решения задачи целочисленного линейного программирования (4.1)-(4.4.) методом Гомори используется следующий алгоритм:

- симплексным методом решается задача (4.1)-(4.3) без учета условия целочисленности. Если все компоненты оптимального плана целые, то он является оптимальным и для задачи целочисленного программирования (4.1)-(4.4). Если первая задача (4.1)-(4.3) неразрешима (т.е. не имеет конечного оптимума или условия ее противоречивы), то и вторая задача (4.1)-(4.4) также неразрешима;

- если среди компонент оптимального решения есть нецелые, то выбирается компонента с наибольшей целой частью и по соответствующему уравнению системы (4.5) формируется правильное отсечение (4.6);

- неравенство (4.6) путем введения дополнительной неотрицательной целочисленной переменной преобразовывается в равносильное уравнение

$$\{\beta_i\} - \{\alpha_{im+1}\}x_{m+1} - \ldots - \{\alpha_{in}\}x_n + x_{n+1} = 0, \quad (4.7)$$

и включается в систему ограничений (4.2);

- полученную расширенную задачу решают симплексным методом. Если найденный оптимальный план будет целочисленным, то задача целочисленного программирования (4.1)-(4.4) решена. В противном случае следует вернуться к пункту 2 алгоритма и повторить цикл до тех пор, пока не будет получен оптимальный план .

Если задача разрешима, то оптимальный целочисленный план будет найден после конечного числа шагов (итераций).

Если в процессе решения появится уравнение (выражающее основную переменную через неосновные) с нецелым свободным членом и целыми остальными коэффициентами, то соответствующее уравнение не имеет решения в целых числах. В этом случае и данная задача не имеет целочисленного оптимального решения.

### 4.3. Задачи нелинейного программирования. Метод Лагранжа для решения задач оптимизации на условный экстремум.

Из методов математического программирования наиболее сложными считаются методы нелинейного программирования. Они подразделяются по типу оптимумов, задач и методов их решения (рис. 4.1).

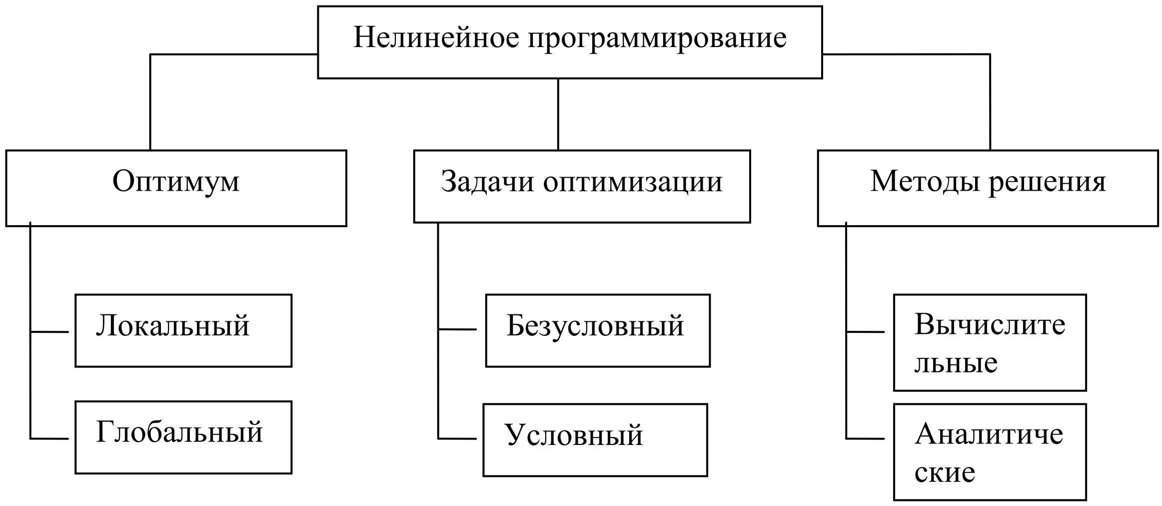


Рис.4.1 Классификация задач нелинейного программирования

Задача нелинейного программирования формулируется так же, как и общая задача оптимального программирования:

$$\left.\begin{aligned} &F = f(x_j) \rightarrow \max(\min) \\ &g_i(x_j)\ \{\le, =, \ge\} d_i; \\ &a_j \le x_j \le b_j; i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}. \end{aligned}\right\} \quad (4.8)$$

Задача математического программирования называется нелинейной, если нелинейны ограничения или целевая функция.

К задачам оптимизации в нелинейном программировании относятся задачи безусловной и условной оптимизации.

Задачами безусловной оптимизации называются такие, в которых задается лишь одна целевая функция $F = f(x_j) \to \max(\min)$ без указания ограничений и граничных условий (эти задачи носят теоретический характер, так как на практике граничные условия задаются всегда).

Задачами условной оптимизации называются такие, когда кроме целевой функции, в них задаются некоторые дополнительные условия, которые должны быть выполнены. Ограничения могут быть заданы в виде, как уравнений, так и неравенств, при этом введение ограничений либо не влияет на оптимум, либо ухудшает его.

Из методов решения задач нелинейного программирования выделяются аналитические и вычислительные методы.

Аналитические методы решения задач безусловной оптимизации. Для того чтобы найти экстремум функции одной переменной $F = f(x)$, необходимо выполнить следующий алгоритм: а) найти первую производную $df/dx$; б) приравнять ее нулю; в) решить данное уравнение, из которого определить значения x, при которых функция имеет экстремум; г) найти вторую производную $d^2f/dx^2$ и определить знаки этой производной в точке $x^*$: если при этом $d^2f/dx^2 < 0$, то точка $x^*$ соответствует максимуму, а если $d^2f/dx^2 > 0$, то точка $x^*$ соответствует минимуму.

В общем случае для функции из $n$ переменных необходимое условие экстремума выглядит следующим образом:

$df/dx_1 = 0$; $df/dx_2 = 0$; …; $df/dx_n = 0$,

или $\operatorname{grad} f(x_j) = 0$

Особое место занимают задачи типа

$$F = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min),$$

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, i = \overline{1, m}.$$

К классу широко применяемых задач нелинейного программирования относятся задачи с линейными ограничениями и нелинейной целевой функцией. Для решения таких задач можно воспользоваться классическим методом оптимизации Лагранжа, или методом разрешающих множителей. Метод Лагранжа предполагает:

а) составление функции Лагранжа

$$L(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, x_2, ..., x_n),$$

б) определение частных производных этой функции по переменным $x_j (j = \overline{1, n})$ и множителям Лагранжа $\lambda_j (j = \overline{1, m})$ и приравнивание их к нулю;

в) решение полученной системы уравнений, которая имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dL}{dx_j} = \dfrac{df}{dx_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{dg_i}{dx_j} = 0,\ j = \overline{1,n}, \\ \dfrac{dL}{d\lambda_j} = g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, i = \overline{1,m}. \end{cases}$$

Пример. Найти экстремум функции $y = x_1^2 + x_2^2$ при условии, что $x_1 + x_2 - 1 = 0$, т.е. решить задачу на условный экстремум методом Лагранжа.

Решение. Имеем $L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 1)$, откуда следует, что:

$$\left.\begin{aligned} dL(x_1, x_2, \lambda)/dx_1 &= 2x_1 + \lambda = 0; \\ dL(x_1, x_2, \lambda)/dx_2 &= 2x_2 + \lambda = 0; \\ dL(x_1, x_2, \lambda)/d\lambda &= x_1 + x_2 - 1 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Из первых дух уравнений получаем что $x_1 = x_2$, откуда, используя третье уравнение, получаем, что $x_1^* = x_2^* = 1/2$, $\lambda^* = -1$.

Укороченная критическая точка $(x_1^*, x_2^*) = (1/2; 1/2)$ есть точка условного локального минимума заданной функции при её заданном ограничении.

Отметим, что даже для задач с линейными ограничениями вычислительные методы разработаны лишь в тех случаях, когда целевая функция имеет определенные свойства, например, функция F сепарабельная, т.е.

$$F = f(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + ... + f_n(x_n).$$

Чтобы гарантировать возможность отыскания оптимального решения, на функции $f_j(x_j)$ должны быть наложены добавочные ограничения. Другим примером могут служить задачи, в которых целевая функция может быть записана как сумма линейной и квадратичной форм, так что

$$F = f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j.$$

Такие нелинейные задачи называются задачами квадратичного программирования. Чтобы быть уверенным, что оптимальное решение и в этом случае может быть найдено, на величины $d_{ij}$ следует наложить некоторые ограничения.

Один из наиболее мощных методов решения задач нелинейного программирования состоит в преобразовании задачи каким-либо образом к виду, допускающему применение симплексного алгоритма. Природа «преобразования», с помощью которого нелинейная задача может быть приведена к форме, допускающей применение симплексного метода, очень сильно зависит от типа задачи. В некоторых случаях не требуется никакой предварительной аппроксимации, в других аппроксимация нужна. Однако эта аппроксимация может быть сделана сколь угодно точной (ценой увеличения объема вычислений).

Широко применяется градиентный метод. Он представляет собой итеративную процедуру, в которой переходят шаг за шагом от одного допустимого решения к другому так, что значение целевой функции улучшается. Однако в отличие от симплексного метода ЛП в нем не используется переход от одной вершины к другой. Вообще говоря, для сходимости к решению здесь требуется бесконечное число итераций.

В последнее время широкое применение нашли методы штрафных функций и барьеров. Метод штрафных функций аппроксимирует задачу с ограничениями задачей без ограничений с функцией, которая налагает штраф за выход из допустимой области. Идея метода барьеров аналогична методу штрафных функций, однако аппроксимация здесь осуществляется «изнутри» допустимой области.

4.4. Модели потребительского выбора с учетом функции полезности.

Пусть потребитель располагает доходом *I*, который полностью расходуется им на приобретение благ (продуктов), причем цены благ считаются заданными. Учитывая текущие структуру цен, объем дохода *I* и собственные предпочтения, потребитель приобретает определенное количество благ. Математическая модель его поведения в этой ситуации называется моделью потребительского выбора (ПВ).

Рассмотрим сначала простейшую модель ПВ с двумя видами благ, что удобно интерпретировать графически, сохраняя при этом принципиальные свойства общей модели. Итак, потребительский набор как вектор ($x_l$, $x_2$) состоит из двух благ ($x_1$ - количество единиц первого блага, $x_2$ - количество единиц второго блага).

Выбор каждого потребителя характеризуется отношением предпочтения: про каждые два набора он может сказать, что либо один из них более желателен, либо они для него равноценны (отношение предпочтения транзитивно, т. е. если набор $A = (a_1, a_2)$ предпочтительнее набора $B = (b_1, b_2)$, а набор *B* предпочтительнее набора $C = (c_2, c_2)$, то набор $A$ предпочтительнее набора $C$.

На множестве потребительских наборов $(x_1, x_2)$ можно определить индивидуальную функцию полезности потребителя $u(x_1, x_2)$, значение которой на потребительском наборе $(x_1, x_2)$ соответствует его потребительской оценке по этому набору (потребительскую оценку $u(x_1, x_2)$, называют еще уровнем (или степенью) удовлетворения потребностей индивида, если он приобретает или потребляет данный набор $(x_1, x_2)$. Если набор $A$ предпочтительнее набора $B$, то $u(A) > u(B)$.

В теории потребления предполагается, что функция полезности обладает следующими свойствами:

1) $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} > 0$ - с ростом потребления блага полезность растет;

2) $\lim\limits_{x_i \to 0} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \infty$ - небольшой прирост блага при его первоначальном отсутствии резко увеличивает полезность;

3) $\frac{\partial u^2}{\partial x_i^2} < 0$ - с ростом потребления блага скорость роста полезности замедляется. Это свойство называют еще законом Госсена - законом убывания предельной полезности;

4) $\lim\limits_{x_i \to \infty} \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ - при очень большом объеме блага его дальнейшее увеличение не приводит к увеличению полезности.

Условие 3 обычно используется в более расширенной трактовке: матрица вторых производных (матрица Гессе) $U(x) = \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|$ отрицательно определена.

Линия, соединяющая потребительские наборы ($x_1$, $x_2$) , имеющие один и тот же уровень удовлетворения потребностей индивида, называется линией безразличия (кривой безразличия), или линией уровня функции полезности. Множество линий безразличия называется картой линии безразличия. Линии безразличия, соответствующие разным уровням удовлетворения потребностей, не касаются и не пересекаются (см. рис.4.2). Чем линия безразличия L1 расположена выше и правее («северо-восточнее») линии безразличия L2, тем большему уровню удовлетворения потребности она соответствует.

Величина $\Delta u / \Delta x_i > 0$ указывает на изменение полезности на дополнительную единицу j-го блага. Частная производная $\partial u / \partial x_i$ - называется предельной полезностью j-го блага.

Величина $n_{ij} = \partial x_i / \partial x_j$ называется коэффициентом (нормой) предельной эквивалентной замены благ.

Задача потребительского выбора (задача рационального поведения потребителя на рынке) заключается в выборе такого потребительского набора $A(x_1^*, x_2^*)$, который максимизирует его функцию полезности при заданном бюджетном ограничении. Бюджетное ограничение означает, что денежные расходы на продукт не могут превышать денежного дохода:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$$

где $p_1$ и $p_2$ - рыночные цены одной единицы первого и второго блага соответственно, I - доход индивида, предназначенный для приобретения первого и второго блага (величины $p_1$, $p_2$ и I заданы).

Формально задача потребительского выбора может иметь вид:

$$\left.\begin{array}{l} u(x_1, x_2) \to \max, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \le I, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{array}\right\} \quad (4.9)$$

Допустимое множество задачи (т. е. множество наборов благ, доступных для потребителя) представляет собой треугольник, ограниченный осями координат и бюджетной прямой (рис. 4.2). На этом множестве требуется найти точку, принадлежащую кривой безразличия с максимальным уровнем полезности. Поиск этой точки можно интерпретировать графически как последовательный переход на линии все более высокого уровня полезности (вправо - вверх) до тех пор, пока эти линии еще имеют общие точки с допустимым множеством.

Набор $(x_1^*, x_2^*)$, являющийся решением задачи потребительского выбора, принято называть оптимальным для потребителя, или локальным рыночным равновесием потребителя.

Как видно из (4.9), задача потребительского выбора является задачей нелинейного программирования. Однако, если на каком-либо потребительском наборе $(x_1, x_2)$ бюджетное ограничение $p_1x_1 + p_2x_2 \le I$ выполняется как строгое неравенство, то мы можем увеличить потребление какого-либо из продуктов и тем самым увеличить функцию полезности. Следовательно, набор $(x_1^*, x_2^*)$, максимизирующий функцию полезности, должен обращать бюджетное ограничение в равенство, т. е. $p_1x_1 + p_2x_2 = I$. Графически это означает, что решение $(x_1^*, x_2^*)$ задачи потребительского выбора должно лежать на бюджетной прямой (см. рис. 2), которую удобнее всего провести через точки пересечения с осями координат, где весь доход тратится на один продукт: (0; I/$p_2$) и (I/$p_1$ ;0).

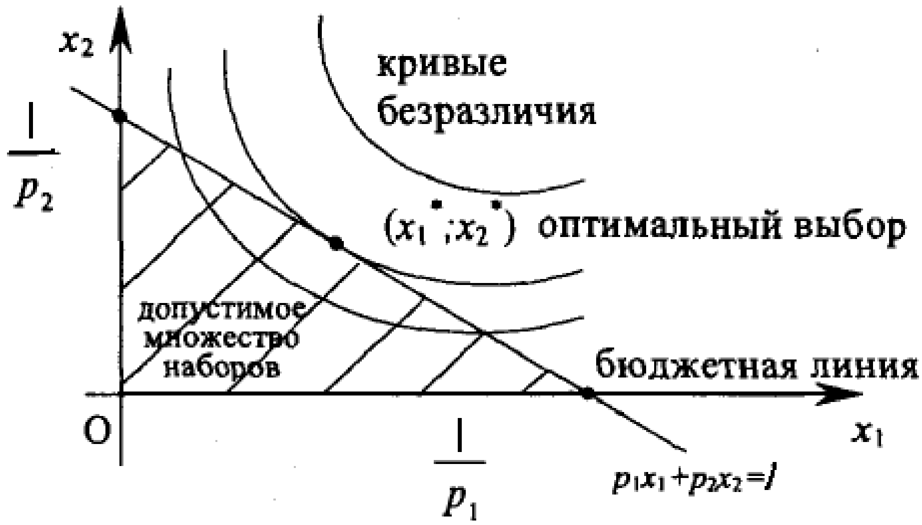


Рис 4. 2. Геометрическая интерпретация модели потребительского выбора

Таким образом, решение задачи потребительского выбора можно заменить на решение задачи на условный экстремум, для решения которой применим метод Лагранжа.

В общем случае задача потребительского выбора формулируется следующим образом. Пусть заданы целевая функция предпочтения потребителя $u(x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_i$ – количество i-го блага, вектор цен $\{p_i\} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ и доход *I*.

$u(x_1) \to \max$

при условиях:

$px \le I, \quad x \ge 0,$

где $x = (x_1,..., x_2)$, $p = (p_1,..., p_n)$, $px = (p_1x_1+,...,+p_nx_n)$,.

Считаем, что неотрицательность переменных обеспечивается свойствами целевой функции и бюджетного ограничения. В этом случае можно записать функцию Лагранжа и исследовать ее на безусловный экстремум: $L(x,\lambda) = u(x) + \lambda(px - I)$.

## Тема 5. Методы и модели динамического программирования

### 5.1. Общая постановка задачи динамического программирования

Динамическое программирование – метод оптимизации, основанный на операциях, в которых процесс принятия решения может быть разбит на этапы (шаги). Такие операции называются многошаговыми. Начало развития динамического программирования относится к 50-м годам XX в. Его основателем является американский математик Беллман Р.Э .

Модели динамического программирования применяются в экономике при решении задач небольшого масштаба, например, при разработке планов управления запасами, устанавливающими момент пополнения запасов и размер пополняющего запаса; при разработке календарных планов производства и занятости в условиях колеблющегося спроса на продукцию; при распределении капитальных вложений между возможными новыми направлениями их использования; при составлении календарных планов ремонта сложного оборудования и его замены; при разработке долгосрочных планов замены выбывающих из эксплуатации основных фондов и т. п.

Пусть имеется какой-либо управляемый экономический процесс (объект управления), который переводится из начального состояния $s_0$ в состояние $\hat{s}$. Предположим, что управление можно разбить на n шагов, т.е. решение принимается последовательно на каждом шаге.

Обозначим через $X_k$ управление на $k$-м шаге $(k = 1,2,...,n)$. Переменные $x_k$ являются допустимыми значениями $X_k$. Обозначим через $s_k$ состояние системы после k-го шага управления $(s_0, s_1,..., s_{k-1}, s_k,..., s_{n-1}, s_n = \hat{s})$ .

Показатель эффективности управления обозначим через Z:

$$Z = F(s_0, X). \quad (5.1)$$

Сделаем два предположения:

- состояние $(s_k)$ системы в конце k-го шага зависит только от предшествующего состояния $s_{k-1}$ и управления на k-м шаге $X_k$ (и не зависит от предшествующих состояний и управлений). Это требование называется "отсутствием последействия". Сформулированное положение записывается в виде уравнений

$$s_k = \varphi_k(s_{k-1}, X_k), \; k = \overline{1,n} \;, \quad (5.2)$$

которые называются уравнениями состояний.

- целевая функция (1) является функцией от показателя эффективности каждого шага . Обозначим показатель эффективности k-го шага через

$$Z_k = f_k(s_{k-1}, X_k),\ k = \overline{1,n}\ , (5.3)$$

тогда

$$Z = \sum_{k=1}^{n} f_k(s_{k-1}, X_k). (5.4)$$

Задача динамического программирования пошаговой оптимизации формулируется так: определить такое допустимое управление *X*, переводящее систему *S* из состояния $s_0$ в состояние $\hat{S}$, при котором целевая функция (5.4) принимает наибольшее (наименьшее) значение.

К особенностям модели динамического программирования относятся:

- задача оптимизации интерпретируется как n-шаговый процесс управления;

- целевая функция равна сумме целевых функций каждого шага;

- выбор управления на k-м шаге зависит только от состояния системы к этому шагу и не влияет на предшествующие шаги (нет обратной связи);

- состояние $s_k$ после k-го шага управления зависит только от предшествующего состояния $s_{k-1}$ и управления $X_k$ (отсутствие последействия);

- на каждом шаге управление $X_k$ зависит от конечного числа управляющих переменных, а состояние $s_k$ - от конечного числа параметров.

## 5.2. Принцип оптимальности и уравнения Беллмана

Существуют различные способы решения задач, динамического программирования. Один из способов основывается на принципе оптимальности, впервые сформулированном Р. Беллманом (в 1953г.), следующим образом: каково бы ни было состояние s системы в результате какого-либо числа шагов, на ближайшем шаге нужно выбирать управление так, чтобы оно в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах приводило к оптимальному выигрышу на всех оставшихся шагах, включая данный.

Беллманом определены и условия, при которых принцип верен. Основное требование - процесс управления должен быть без обратной связи, т.е. управление на данном шаге не должно оказывать влияния на предшествующие шаги.

Принцип оптимальности утверждает, что для любого процесса без обратной связи оптимальное управление таково, что оно является оптимальным для любого подпроцесса по отношению к исходному состоянию этого подпроцесса. Поэтому решение на каждом шаге оказывается наилучшим с точки зрения управления в целом.

Рассмотрим последовательность задач, полагая $n = 1,2,...,$- одношаговую, двухшаговую и т.д., - используя принцип оптимальности.

На каждом шаге любого состояния системы $s_{k-1}$ решение $X_k$ нужно выбирать "с оглядкой", так как этот выбор влияет на последующее состояние $s_л$ и дальнейший процесс управления, зависящий от $s_k$. Это следует из принципа оптимальности.

Но есть один шаг, последний, который можно для любого состояния $s_{m-1}$ планировать локально-оптимально, исходя только из соображений этого шага.

Введем обозначения:

$s_{m-1}$ - состояние системы к началу n-го шага, $s_n = \hat{s}$ - конечное состояние, $X_n$- управление на n-и шаге, а $f_n(s_{n-1}, X_n)$ - целевая функция (выигрыш) n-го шага.

Согласно принципу оптимальности, $X_n$ нужно выбирать так, чтобы для любых состояний $s_{m-1}$ получить максимум целевой функции на этом шаге.

Обозначим через $Z_n^*(s_{m-1})$ максимум целевой функции - показателя эффективности n-го шага при условии, что к началу последнего шага система S была в произвольном состоянии $s_{m-1}$, а на последнем шаге управление было оптимальным.

$Z_n^*(s_{m-1})$ называется условным максимумом целевой функции на n-м шаге и описывается равенством:

$$Z_n^*(s_{n-1}) = \max_{\{X_n\}} f_n(s_{n-1}, X_n), \quad (5.5)$$

Решение $X^*{}_n(s_{n-1})$, при котором достигается $Z_n^*(s_{m-1})$ называется условным оптимальным управлением на n-м шаге.

Решив одномерную задачу локальной оптимизации по уравнению (5.5), найдем для всех возможных состояний $s_{m-1}$ две функции: $Z_n^*(s_{n-1})$ и $X_n^*(s_{n-1})$. Присоединим к n-му шагу (n-1)-й (рис. 5. 1).

Для любых состояний $s_{m-2}$, произвольных управлений $X_{n-1}$ и оптимальном управлении на n-м шаге значение целевой функции на двух последних шагах равно:

$$f_{n-1}(s_{n-2}, X_{n-1}) + Z_n^*(s_{n-1}). \quad (5.6)$$

Согласно принципу оптимальности для любых $s_{m-2}$ решение нужно выбирать так, чтобы оно вместе с оптимальным управлением на последнем (n-м) шаге приводило бы к максимуму целевой функции на двух последних шагах. Следовательно, нужно найти максимум выражения (5.6) по всем допустимым управлениям $X_{n-1}$. Максимум этой суммы обозначим ее через $Z_{n-1}^*(s_{n-2})$ и называется условным максимумом целевой функции при оптимальном управлении на двух последних шагах. Соответствующее управление $X_{n-1}^*(s_{n-2})$ на (n-1)-м шаге называется условным оптимальным управлением на (n-1)-м шаге.

$$Z_{n-1}^*(s_{n-2}) = \max_{\{X_{n-1}\}} \{f_{n-1}(s_{n-2}, X_{n-1}) + Z_n^*(s_{n-1})\}. \qquad (5.7)$$

Выражение, состоящее в фигурных скобках (5.7), зависит только от $s_{m-2}$ и $X_{n-1}$ , так как $s_{m-1}$ можно найти из уравнения состояний (2) при k=n-1

$$s_{m-1} = \varphi_{n-1}(s_{n-2}, X_{n-1})$$

и подставить вместо $s_{m-1}$ в функцию $Z_n^*(s_{m-1})$. В результате максимизации только по одной переменной $X_{n-1}$ согласно уравнению (5.7) вновь получаются две функции:

$$Z_{n-1}^*(s_{n-2}) \text{ и } X_{n-1}^*(s_{n-2}).$$

Далее рассматривается трехшаговая задача: к двум последним шагам присоединяется (n-2)-й и т. д.

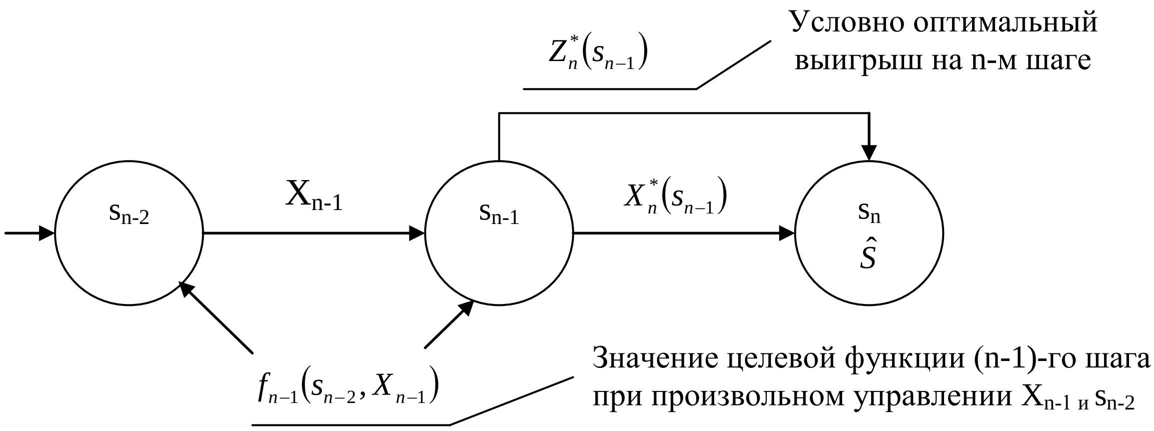


Рис. 5.1. Задача динамического программирования

Обозначим через $Z_k^*(s_{k-1})$ условный максимум целевой функции, полученный при оптимальном управлении на n-k+l шагах, начиная с k-го до конца, при условии, что к началу k-го шага система находилась в состоянии $s_{k-1}$. Фактически эта функция равна

$$Z_k^*(s_{k-1}) = \max_{\{(X_k,\dots,X_n)\}} \sum_{i=k}^{n} f_i(s_{i-1}, X_i)., \text{ тогда}$$

$$Z_{k+1}^*(s_k) = \max_{\{(X_{k+1},\dots,X_n)\}} \sum_{i=k+1}^{n} f_i(s_{i-1}, X_i).$$

Целевая функция на n-k последних шагах при произвольном управлении $X_k$ на k-м шаге и оптимальном управлении на последующих n-k шагах равна

$$f_k(s_{k-1}, X_k) + Z_{k+1}^*(s_k).$$

Согласно принципу оптимальности, $X_k$ выбирается из условия максимума этой суммы, т.е.

$$Z_k^*(s_{k-1}) = \max_{\{X_k\}}\{f_k(s_{k-1}, X_k) + Z_{k+1}^*(s_k)\},\ k = n-1, n-2, \dots, 2, 1. \ (5.8)$$

Управление $X_k(s_{k-1})$ на k-м шаге, при котором достигается максимум в (5.8), называется условным оптимальным управлением на k-м шаге (в правую часть уравнения (5.8) следует вместо $s_k$ подставить выражение $s_k = \varphi_k(s_{k-1}, X_k)$, найденное из уравнений состояния.

Управляющее воздействие (5.8) называют уравнениями Беллмана. Если из (5) найти $Z_n^*(s_{n-1})$, то, решив задачу максимизации для всех возможных значений $s_{n-2}$ при $k = n-1$ из (5.7) можно определить, выражения для $Z_{n-1}^*(s_{n-2})$ и соответствующее $X_{n-1}^*(S_{n-2})$. Далее, зная $Z_{n-1}^*(s_{n-2})$, находим, используя (5.8) и (5.6), уравнения состояний.

Процесс решения уравнений (5.5) и (5.8) называется условной оптимизацией. В результате условной оптимизации получаются две последовательности:

– $Z_n^*(s_{n-1})$ , $Z_{n-1}^*(s_{n-2}),\ldots, Z_2^*(s_1), Z_1^*(s_0)$ (5.9) - условные максимумы целевой функции на последнем, на двух последних, …,на n шагах и

– $X_n^*(s_{n-1}), X_{n-1}^*(s_{n-2}),\ldots, X_2^*(s_1), X_1^*(s_0)$ (5.10) - условные оптимальные управления на $n-m, (n-1)-m, \ldots, 1$-м шагах.

Используя последовательности, (5.9) и (5.10), можно найти решение многошаговой задачи динамического программирования при данных $n$ и $s_0$. По определению $Z_n^*(s_0)$ - условный максимум целевой функции за $n$ шагов при условии, что к началу 1-го шага система была в состоянии $s_0$, т.е.

$Z_{\max} = Z_1^*(s_0)$. (5.11)

Далее следует использовать последовательность условных оптимальных управлений и уравнения состояний (2).

При фиксированном $s_0$ получаем $X_1^* = X_1^*(s_0)$.. Далее из уравнений (5.2) находим $s_1^* = \varphi_1(s_0, X_1^*)$, и подставляем это выражение в последовательность условных оптимальных управлений:

$X_2^* = X_2^*(s_1^*)$ и т.д. по цепочке:

$$X_1^* = X_1^*(s_0) \to s_1^* = \varphi_1(s_0, X_1^*) \Rightarrow X_2^* = X_2^*(s_1^*) \to s_2^* = \varphi_2(s_1^*, X_2^*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_3^* = X_3^*(s_2^*) \to \ldots \to s_{n-1}^* = \varphi_{n-1}(s_{n-2}^*, X_{n-1}^*) \Rightarrow X_n^* = X_n^*(s_{n-1}^*),$$

где $s_k$ – состояние системы после k-го шага при условии, что на k-м шаге выбрано оптимальное управление.

Получаем оптимальное решение задачи динамического программирования $X^* = (X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*)$,

(Стрелка $\to$ означает использование уравнений состояния, а стрелка => - последовательности условных оптимальных управлений).

## Тема 6. Основы моделирования управленческих решений в экономике.

6.1. Основные понятия теории оптимального управления.

Рассмотрим общую постановку задачи оптимизации экономических систем. Пусть имеется система, состояние которой может измениться в результате некоторого количества управляющих воздействий. Задавая эти воздействия, можно получить определенный процесс изменения состояния системы. При этом возникают две задачи: первая предполагает выбор таких воздействий на систему, чтобы происходящий процесс удовлетворял заданным условиям (такие процессы принято называть допустимыми), вторая задача - выбор из этого множества допустимых процессов наилучшего (оптимального) процесса.

Введем некоторые понятия и обозначения: Пусть $M$ множество с элементами $v\ (v \in M)$, где $v$- пары вида $v=(x,y), x \in X, y \in Y, X, Y$ - некоторые заданные множества; $M_x$- подмножество (проекция множества $M$ на множество $X$) обладающее тем свойством, что для каждого $x \in M_x$ существует такой элемент $y \in Y$, что пара $v=(x,y)$ содержится в множестве $M$; $M^x$- сечение множества $M$, т.е. множество всех $y$, при которых пара $v=(x,y)$ принадлежит множеству $M$; $F$ - функционал т.е. говорят, что на множестве $M$ задан функционал $F$ , если известно правило, которое каждому элементу $v \in M$ ставит в соответствие определенное действительное число $F(v)$.

В общем виде задача оптимизации формулируется как задача отыскания минимального (или максимального) значения функционала $F(v)$ на множестве $M$.

Предположим, что требуется минимизировать функционал $F(v)$ на множестве $M$. Если решение этой задачи существует (обозначим его через $\bar{v}$), то $\bar{v}$ называется оптимальным элементом множества $M$, а величина $\bar{F}=F(\bar{v})$ - оптимальным значением функционала:

$$\bar{F}=F(\bar{v}) \to \min_{v \in M} F(v).$$

Аналогично формулируется задача о нахождении максимального значения функционала.

Точной нижней границей функционала $F(v)$на множестве $M$ принято называть такое число $m$, если:

- $F(v) \geq m$ для любого $v \in M$;
- существует последовательность $\{\overline{v_s}\} \in M$, на которой $F(\overline{v_s}) \to m$.

Точная нижняя граница функционала обозначается

$$m=\inf_{v \in M} F(v).$$

Последовательность $\{v_s\}$ называется минимизирующей последовательностью. Точно так же определяется точная верхняя граница $n$ функционала $F(v)$:

$$n=\sup_{v \in M} F(v)$$

Назовем функционал $F(v)$ ограниченным снизу (сверху) на множестве $M$, если существует такое число $A$, что при всех $v \in M$ $F(v) \geq A$ ($F(v) \leq A$). Если функционал является ограниченным снизу (сверху), то решение задачи о нахождении его точной нижней (верхней) границы существует, т. е. имеет место следующая теорема (приведем без доказательства): Пусть на множестве М задан ограниченный снизу функционал $F(\nu)$. Тогда реализуется одна из двух возможностей:

1) существуют элемент $\overline{\nu} \in M$ и число $\overline{F}$, при которых $F(\overline{\nu}) = F$ и $F(\nu) \geq \overline{F}$ при всех $\nu \in M$;

2) существуют последовательность $\{\overline{\nu}_s\}$ элементов множества $M$ и число $\overline{F}$, удовлетворяющее условиям $F(\overline{\nu_s}) \to \overline{F}$, $s \to \infty$ и $F(\nu) > \overline{F}$ при всех $\nu \in M$.

6.2. Математическая модель оптимальных управленческих процессов.

Рассмотрим постанову задач оптимального управления. Введем некоторые понятия. Важнейшими из них являются понятия состояния системы и управления. Будем рассматривать системы, состояние которых в любой момент времени определено вектором *x* *n*-мерного пространства с координатами $x = (x^1, x^2, ..., x^n)$ $x \in X$ , где $X$ – пространство состояний системы.

Последовательность состояний системы во времени $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ называют ее траекторией.

Переменная $t$ может быть некоторым отрезком числовой прямой ($t \in [t_0, t_1]$) или отрезком натурального ряда ($t = t_0, t_0 + 1, ..., T$). В первом случае процесс, происходящий в системе, называется непрерывным, во втором случае - многошаговым, а системы - соответственно непрерывными и дискретными.

Изменение состояния системы, может происходить в результате управляющих воздействий. Управляющие воздействия обозначим с помощью элементов *r*-мерного пространства *U :*

$$u = (u^1, u^2, ..., u^r),\ u \in U \subset R^r.,\ (1)$$

где *u*- *r*-мерное пространство.

Управляющие воздействия задают в виде функций от $t$, т.е. $u(t) = (u^1(t), u^2(t), ..., u^r(t))$.

На допустимые состояния системы $x(t)$ и управления $u(t)$ могут быть наложены ограничения. Рассмотрим множество троек $(t, x, u)$ - совокупность $(n + r + 1)$ - мерных векторов в пространстве $R^{n+r+1}$. Тогда ограничения на состояние системы и управление в общем случае могут быть записаны в виде

$$(t, x, u) \in V,\ (6.1)$$

где $V \in R^{n+r+1}$ - некоторая область (подмножество) рассматриваемого $(n + r + 1)$ - мерного пространства. Ограничения на величины $x(t)$, $u(t)$ в каждый фиксированный момент времени *t* могут быть заданы и в виде

$$(x(t), u(t)) \in V^t,\ (6.2)$$

где $V^t$ - сечение множества $V$ при заданном значении $t$.

Между функциями $x(t), u(t)$ имеется связь: как только задано управление $u(t)$ системой, последовательность ее состояний (траектория системы) $x(t)$ определяется однозначно. Связь между $x(t)$ и $u(t)$ моделируется по-разному в зависимости от того, является система непрерывной или дискретной.

Для непрерывных систем модели процессов задаются системой дифференциальных уравнений вида

$$x^i = f^i\left(t, x^1, ..., x^n, u^1, ..., u^r\right), \ i = 1,2,...,n,$$

или в векторной форме

$$x = f(t, x, u). \ (6.4)$$

Пусть задано состояние, в котором система находилась в начальный момент $t_0$. Для простоты этот момент примем равным нулю, а момент окончания процесса $t_1$- равным $T$. Тогда аргумент процесса $t$ изменяется в пределах $0 \le t \le T$, а начальным состоянием системы будет вектор

$$x(0) = (x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n), \ (6.5)$$

где $x_0^i = x^i(0)$ - начальное значение $i$-й координаты вектора состояния системы.

Проанализируем, каким образом модель отражает связь между управлениями и состоянием системы, изменяющимся под их воздействием. Пусть на промежутке $0 \le t \le T$ задано управление $u(t)$. Подставляя его в правую часть системы (4), получим

$$x = f(t, x, u(t)) \ (6.6)$$

Имеем систему дифференциальных уравнений относительно неизвестной функции $x = (x^1, x^2, ..., x^n)$. Решая ее с учетом начальных условий (5), получим $x(t)$. Это решение и есть траектория, отвечающая заданному управлению $u(t)$.

Функционал задач оптимального управления для непрерывных систем записывается следующим образом:

$$F(\overline{v}) = \int_0^T f^0(t, x, u)dt + F(x(T)), \ (6.7)$$

где $f^0(t, x, u) = f^0\left(t, x^1, ..., x^n, u^1, ..., u^r\right)$; $F(x) = F\left(x^1, ..., x^n\right)$ - заданные функции.

Функционал $F(v)$ состоит из двух частей: $\int_0^T f^0(t, x, u)dt$ и $F(x(T))$. Первое из этих слагаемых оценивает качество процесса на $(x(t), u(t))$ на всем промежутке $[0, T]$, второе слагаемое - качество конечного состояния системы. Иногда в задачах оптимального управления конечное состояние системы $x(T) = x_1$ задается. В этом случае второе слагаемое функционала (6.7) есть величина постоянная и, следовательно, не влияет на его минимизацию. Такие задачи называются задачами с фиксированным правым концом траектории.

Модель дискретной управляемой системы имеет вид системы рекуррентных уравнений:

$$x^i(t+1) = f^i\big(t, x^1(t),\dots, x^n(t), u^1(t),\dots, u^r(t)\big),\ i = 1,2,\dots,n.$$

В векторной форме эту модель можно записать в виде

$$x^i(t+1) = f^i\big(t, x(t), u(t)\big)\ ,\ i = 1,2,\dots,n\ (6.8).$$

Здесь $t$ принимает значение $t = 0,1,\dots,T-1$. Начальное значение $x(0) = x_0$ будем считать известным.

В дискретной системе, как и в непрерывной, задание управляющих воздействий $u(t)$ при $t = 0,1,\dots,T-1$ позволяет однозначно определить отвечающую им траекторию системы. При подстановке значения $u(t)$ в правую часть (6.8) получаем систему уравнений, которая позволяет при известном значении состояния $u(t)$ в момент времени $t$ определить состояние $x(t+1)$ в следующий момент времени. Так как в начальный момент $t = 0$ состояние $x(0) = x_0$ известно, то, подставив его в правую часть (6.8), получим

$$x(1) = f\big(0, x_0, u(0)\big).\ (6.9)$$

Подставляя затем найденное значение $x(1)$ и $t = 1$ в (6.8), так же найдем значение $x(2)$. Продолжая этот процесс, через $T$ шагов получим последнее искомое значение $x(T)$.

Таким образом, и в дискретном случае уравнения модели (6.8) позволяют однозначно определить траекторию системы $x(t)$, если задано управление $u(t)$.

Для задач оптимизации в дискретных системах функционал имеет вид

$$F(v) = \sum_{t=0}^{T-1} f^0\big(t, x(t), u(t)\big) + F\big(x(T)\big).\ (6.10)$$

К функционалу (6.10) относятся все замечания и комментарии, сделанные к функционалу (6.7).

### 6.3. Задача оптимизации распределения капитальных вложений в отрасли и модель для её решения

Для отрасли народного хозяйства заданы следующие показатели, связанные в рассматриваемом плановом периоде с обновлением основных фондов:

– стоимость основных фондов в начале планового периода, млн. руб.;

– интервал планового периода, лет;

– минимальный и максимальный объемы капитальных вложений на прирост основных фондов в каждом году планового периода, млн. руб.;

– коэффициент выбытия основных фондов, в долях единицы.

Требуется определить управленческое воздействие и состояние системы в каждом году планового периода, позволяющие оптимально распределить капитальные вложения по годам планового периода. Для построения модели введем следующие обозначения:

- $K(0) = K_0$ – состояние системы (стоимость основных фондов в начале планового периода, млн. руб.;

- $K(t)$ – стоимость системы (стоимость основных фондов) в $t$-м году, $t = 1,2,...,$;

- управленческое воздействие, т.е. стоимость ввода основных фондов (капитальные вложения) в $t$-м году, $t = 1,2,...,; T - 1$;

- $\mu(t)$ – коэффициент выбытия основных фондов в $t$-м году, в долях единицы.

В принятых обозначениях модель оптимизации распределения капитальных вложений в отрасли записывается следующим образом:

Найти $\{I(t), K(t)\}$, позволяющие минимизировать функцию

$F = \alpha \sum_{t=0}^{T-1} I(t) + \beta K(t)$, при условиях:

а) соблюдения заданного ежегодного прироста основных фондов

$$\Delta K(t+1) = (1-\mu)K(t) + I(t),$$

б) соблюдения ограничений на величину управленческого воздействия

$$I(t) \geq I_{\min};$$

$$I(t) \leq I_{\max};$$

где $t = 1,2,..., T - 1$;

в) неотрицательности переменных

$$K(t) \geq 0; I(t) \geq 0.$$

В рассматриваемом случае модель является дискретной моделью роста основных фондов отрасли.

Функция $F$, выражающая критерий оптимальности состоит из двух слагаемых.

Для того чтобы пояснить экономический смысл критерия, положим $\alpha = 1, \quad \beta = 0$. Тогда $F = \sum_{t=0}^{T-1} I(t)$ и минимизация этого функционала означает максимальную экономию капитальных вложений. Если же $\alpha = 0, \beta = 1$, то $F = -K(T)$ и минимизация такого функционала равносильна максимизации $K(T)$ значения основных фондов в конце планового периода.

В функционале $F = \sum_{t=0}^{T-1} I(t)$ отражены два противоположных требования к процессу - экономии капиталовложений, с одной стороны, и увеличения основных производственных фондов отрасли - с другой. Числа $\alpha, \beta$ являются весовыми коэффициентами. Если $\alpha > \beta$, то приоритет отдается первому требованию, если $\alpha < \beta$ - второму.

В данной постановке задачи оптимального управления правый конец траектории *K(t)* является свободным, так как отсутствуют ограничение на значение $K(t)$. Вместе с тем, если положить в функционале $F$ $\alpha = 1, \quad \beta = 0$, то при этом естественно наложить ограничения на значение $K(t)$. Иначе $I(t) = 0$ и задача теряет экономический смысл.

## Модуль III. Теория игр, графов и системы массового обслуживания в экономике

## Тема 7. Игровые методы обоснования экономических и управленческих решений

### 7.1 Управление в условиях неопределенности

При управлении производством принимать решения очень часто приходится, не имея достаточной информации, то есть в условиях неопределенности и риска. Методами обоснования решений в условиях неопределенности и риска занимается математическая теория игр.

В теории игр рассматриваются такие ситуации, когда имеются два участника выполнения операции, каждый из которых преследует противоположные цели. В качестве участников могут выступать коллективы, конкурирующие предприятия и т. д. Во всех случаях предполагается, что операция проводится против разумного противника (конкурента), преследующего свои собственные цели и сознательно противодействующего достижению цели другим участником.

Так как цели противоположны, а результат мероприятия каждой из сторон зависит от действий конкурента, то эти действия называют конфликтными ситуациями. Формализованная модель конфликтной ситуации называется игрой. Результат игры - победа или поражение можно выразить (условно) числами (например, в шахматах: 1, 0, $^1/_2$).

Игра называется игрой с нулевой суммой, если один из игроков выигрывает ровно столько, сколько проигрывает другой.

Развитие игры во времени представляется как ряд последовательных «ходов». Ходы могут быть сознательные и случайные.

Возможные варианты игры сводятся в прямоугольную таблицу (табл.1) - платежную матрицу, в которой строки соответствуют различным стратегиям игрока *A,* столбцы - стратегиям игрока $B, g_{ij}$. Для условности предположим, что игрок А – выигрывает, а игрок В – проигрывает.

В результате выбора игроками любой пары стратегий $A_i$ и $B_j$ (i =1,…, m j = 1,…,n) однозначно определяется исход игры $q_{ij}$.

Цель теории игр - выработка рекомендаций для различного поведения игроков в конфликтной ситуации (выбор оптимальной стратегии для каждого из них).

Для нахождения оптимальной стратегии необходимо проанализировать все возможные стратегии и рассчитывать на то, что разумный противник на каждую из них будет отвечать такой, при которой выигрыш игрока *A* минимален. Обычно минимальные числа в каждой строке обозначаются $\alpha_i$ и выписываются в виде добавочного столбца матрицы (табл. 2).

Они обозначают минимально-возможный выигрыш игрока А при соответствующей стратегии $A_i$. В каждой строке будет свое $\alpha_i = \min\limits_j q_{ij}$.

Так как игрок А выигрывает, то предпочтительной для игрока *A* является стратегия, при которой $\alpha_i$ обращается в максимум, то есть $\alpha = \max_i \alpha_i$ или $\alpha = \max_i \min_j q_{ij}$, где $\alpha$ - максиминный выигрыш (максимин), а соответствующая ей стратегия - максиминная.

Таблица 7.1

| | $B_1$ | $B_2$ | … | $B_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $q_{11}$ | $q_{12}$ | … | $q_{1n}$ |
| $A_2$ | $q_{21}$ | $q_{22}$ | … | $q_{2n}$ |
| … | … | … | … | … |
| $A_m$ | $q_{m1}$ | $q_{m2}$ | … | $q_{mn}$ |

Таблица 7.2

| | $B_1$ | $B_2$ | … | $B_n$ | $\alpha_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $q_{11}$ | $q_{12}$ | … | $q_{1n}$ | $\alpha_1$ |
| $A_2$ | $q_{21}$ | $q_{22}$ | … | $q_{2n}$ | $\alpha_2$ |
| … | … | … | … | … | … |
| $A_m$ | $q_{m1}$ | $q_{m2}$ | … | $q_{mn}$ | $\alpha_i$ |
| $\beta_i$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | … | $\beta_n$ | |

Если придерживаться максиминной стратегии, то при любом поведении стороны *В* (конкурента) гарантирован выигрыш, во всяком случае не меньше $\alpha$. Поэтому $\alpha$ называют также ценой игры - тот гарантированный минимум, который можно обеспечить при наиболее осторожной (перестраховочной) стратегии.

Очевидно, что аналогичные распределения можно провести и для конкурента *В*, который должен рассмотреть все свои стратегии, выделяя для каждой из них максимальные значения проигрыша:

$$\beta_j = \max_i g_{ij} \text{ - последняя строка матрицы}$$

Из всех значений $\beta_j$ находят минимальное:

$$\beta_j = \min_j \max_i q_{ij},$$

которое дает минимаксный выигрыш или минимакс.

Такая $\beta$-стратегия - минимаксная, придерживаясь которой сторона *В* гарантировано, что в любом случае проиграет не больше $\beta$. Поэтому $\beta$ называют верхней ценой игры.

Если $\alpha = \beta = C$, то число $C$ называют чистой ценой игры или седловой точкой.

Для игры с седловой точкой нахождение решения состоит в выборе пары максиминной и минимаксной стратегий, которые являются оптимальными, так как любое отклонение от этих стратегий приводит к уменьшению выигрыша первого игрока и увеличению проигрыша второго игрока по сравнению с ценой игры *C*.

Не все матрицы имеют седловую точку. Тогда решение находят, применяя смешанные стратегии, то есть чередуя случайным образом несколько чистых стратегий (гибкая тактика).

Вектор, каждая из компонент которого показывает относительную частоту использования игроком соответствующей чистой стратегии, называют смешанной стратегией данного игрока.

Из этого определения следует, что сумма компонент этого вектора равна единице, а сами компоненты не отрицательны.

Обычно смешанную стратегию первого игрока обозначают как вектор $U = (u_1, u_2, ..., u_m)$, а второго игрока - как вектор $Z = (z_1, z_2, ... z_m)$, где

$$u_i \geq 0 (i = 1..m), z_j \geq 0 (j = 1..n), \sum_{i=1}^{m} u_i = \sum_{j=1}^{n} z_j = 1. \qquad (7.1).$$

Если $u°$ - оптимальная стратегия первого игрока, z° - оптимальная стратегия второго игрока, то число $\upsilon = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} q_{ij} u_i^0 z_j^0$ - называют ценой игры.

Для того чтобы число $u$ - было ценой игры, а $u^0$ и $z^0$ - оптимальными стратегиями, необходимо и достаточно выполнение неравенств:

$$\sum_{i=1}^{m} q_{ij} u_i^0 \geq \upsilon \qquad (j = 1..n), \ (7.2) \qquad \sum_{j=1}^{n} q_{ij} z_j^0 \leq \upsilon \qquad (i = 1..m). \ (7.3)$$

Если один из игроков применяет оптимальную смешанную стратегию, то его выигрыш равен цене игры *u* вне зависимости от того, с какими частотами будет применять второй игрок стратегии, вошедшие в оптимальную, в том числе и чистые стратегии.

## 7.2. Оценка Риска в «играх с природой»

В случае, когда между сторонами (участниками) отсутствует «антагонизм» (например, в процессе работы предприятий и торговых посредников), такие ситуации называют «играми с природой».

Здесь первая сторона принимает решение, а вторая сторона - «природа» не оказывает первой стороне сознательного, агрессивного противодействия, но ее реальное поведение неизвестно.

Пусть торговое предприятие имеет *m* стратегий: $T_1, T_2, ... T_m$ и имеется n возможных состояний природы: $П_1, П_2, ... П_n$. Так как природа не является заинтересованной стороной, исход любого сочетания поведения сторон можно оценить выигрышем $B_{ij}$ первой стороны для каждой пары стратегий $T_i$ и $П_j$. Все показатели игры заданы платежной матрицей $\{B_{ij}\}_{mxn}$.

По платежной матрице можно принять ряд решений. Например, оценить возможные исходы: минимальный выигрыш

$$B_i^{\min} = \min B_{ij},$$

то есть наименьшая из величин в каждой *i*-й строке как пессимистическая оценка; максимальный выигрыш – то наилучшее, что дает выбор *i*-го варианта

$$B_i^{\max} = \max B_{ij}.$$

При анализе «игры с природой» вводится показатель, по которому оценивают, насколько то или иное состояние «природы» влияет на исход ситуации. Этот показатель называют риском.

Риск $r_{ij}$ при пользовании стратегией $T_i$ и состоянии «природы» $П_j$ оценивается разностью между максимально возможным выигрышем при данном состоянии «природы» $B_i^{\max}$ и выигрышем $B_{ij}$ при выбранной стратегии $T_i$:

$$r_{ij} = B_i^{\max} - B_{ij}.$$

Исходя из этого определения можно оценить максимальный риск каждого решения:

$$r_i^{\max} = \max_j r_{ij}.$$

Решения могут приниматься по результатам анализа ряда критериев.

1. Критерий, основанный на известных вероятностных состояниях «природы».

Если известны вероятности состояний «природы» (например, спроса по данным анализа за прошлые годы):

$$P_1 = P(П_1); P_2 = P(П_2); ...; P_n = P(П_n),$$

где $P_1 + P_2 + ... + P_j + ... + P_n = 1$,

то в качестве показателя эффективности (рациональности, обоснованности) стратегии $T_i$ берется средний (математическое ожидание) - выигрыш применения этой стратегии:

$$\overline{B_i} = \sum_{j=1}^{n} B_{ij} P_j,$$

а оптимальной считают стратегию, для которой этот показатель эффективности имеет максимальное значение, то есть

$$\overline{B} = \max_i \overline{B}_i.$$

Если каждому решению $T_i$ соответствует множество возможных результатов $B_{ij}$ с вероятностями $P_{ij}$, то среднее значение выигрыша можно определить по формуле

$$\overline{B_i} = \sum_{j=1}^{n} B_{ij} P_{ij},$$

а оптимальная стратегия выбирается по условию

$$\overline{B} = \max_i \overline{B}_i.$$

В этом случае можно воспользоваться и стратегией минимального среднего риска для каждого i-го состояния «природы»

$$\bar{r} = \min_i \bar{r}_i = \min_i \sum_{j=1}^{n} r_{ij} P_{ij} \,.$$

Максиминный критерий Вальда предполагает выбор решения, при котором гарантируется максимальный выигрыш в наихудших условиях внешней среды (состояния «природы»):

$$W = \max_i \min_j B_{ij} = \max_i B_i^{\min} .$$

Согласно критерия пессимизма-оптимизма Гурвица при выборе решения вместо двух крайностей в оценке ситуации (оптимум-пессимизм) придерживаются некоторого компромисса, учитывающего возможность как наихудшего, так и наилучшего поведения «природы»:

$$G = \max_i \left[ x \min_j B_{ij} + (1-x) \max_j B_{ij} \right],$$

где $x$ - показатель пессимизма-оптимизма (чаще всего 0,5).

Если x = 1 критерий слишком пессимистичный, если x = 0 – слишком отптимистичный.

По критерию минимаксного риска Сэвиджа выбирают ту стратегию, при которой величина риска имеет минимальное значение в самой неблагоприятной ситуации:

$$S = \min_i \max_j r_{ij}$$

чтобы избежать слишком большого риска при выборе решения.

Комплексный анализ всех этих критериев позволяет в какой-то мере оценить возможные последствия принимаемых решений.

Пример. Известна матрица условных вероятностей $P_{ij}$ продажи старых товаров $C_1$, $C_2$, $C_3$ при наличии новых товаров $H_1$, $H_2$, $H_3$ (табл. 7.3).

Таблица 7.3

Платежная матрица $\{b_{ij}{}^{p_{ij}}\}mxn$

| Старые товары | Новые товары | | |
|---|---|---|---|
| | $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ |
| $C_1$ | 0,6<br>9 | 0,3<br>6 | 0,6<br>4 |
| $C_2$ | 0,2<br>8 | 0,7<br>3 | 0,2<br>7 |
| $C_3$ | 0,1<br>5 | 0,4<br>5 | 0,5<br>8 |

Определить наиболее выигрышную политику продаж.

Решение. Минимальный выигрыш

$$B_i^{\min} = \min_j B_{ij} .$$

Минимальный выигрыш при продаже старого товара

$C_1: \quad B_1^{\min} = \min_{j=1..3}\{B_{11}, B_{12}, B_{13}\} = \min\{9,6,4\} = 4 = B_{13}.$

$C_2: \quad B_2^{\min} = \min\{8,3,7\} = 3 = B_{22}.$

$C_3: \quad B_3^{\min} = \min\{5,5,8\} = 5 = B_{31}.$

где В$_{13}$, В$_{22}$, В$_{31}$ образуют систему пессимистических оценок выигрыша от продаж старых товаров.

Максимальный выигрыш при продаже старых товаров.

$C_1: \quad B_1^{\max} = \max_{j=1..3}\{B_{11}, B_{12}, B_{13}\} = 9 = B_{11},$

$C_2: \quad B_2^{\max} = \max_{j=1..3}\{B_{21}, B_{22}, B_{23}\} = 8 = B_{21},$

$C_3: \quad B_3^{\max} = \max_{j=1..3}\{5,5,8\} = 8 = B_{33},$

где В$_{11}$, В$_{21}$, В$_{33}$ образуют систему оптимистических оценок выигрыша от продаж старых товаров.

При анализе «игры с природой» вводится показатель влияния какого-либо состояния «природы» на исход продаж, то есть показатель риска:

$r_{ij} = B_i^{\max} - B_{ij},$

из которых составляем матрицу рисков (табл. 7.4).

Максимальное значение риска для каждого решения:

Таблица 7.4

Матрица рисков

| Товары | $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ |
|---|---|---|---|
| $C_1$ | 0 | 3 | 5 |
| $C_2$ | 0 | 5 | 1 |
| $C_3$ | 3 | 3 | 0 |

$r_j^{\max} = \max_j r_{ij},$ то есть при продаже товаров:

$C_1: \quad r_1^{\max} = \max_{j=1..3}\{r_{11}, r_{12}, r_{13}\} = \max\{0,3,5\} = 5 = r_{13}.$

$C_2: \quad r_2^{\max} = \max_{j=1..3}\{0,5,1\} = 5 = r_{22},$

$C_{31}: \quad r_3^{max} = \max\{3,3,0\} = 3 = B_{31},$

Решение о плане продаж принимается исходя из анализа системы критериев.

Критерий по известным вероятностным состояниям «природы» $P_{ij}$: оптимальной считают стратегию, для которой этот показатель наибольший, т. е.

$$\overline{B} = \max_i \overline{B_i},$$

где $\overline{B_i}$ — математическое ожидание выигрыша при i-й стратегии!

$$\overline{B_i} = \sum_{j=1}^{3} B_{ij} P_{ij},$$

где $B_{ij}$ - результат (выигрыш при применении *ij-й* стратегии):

$$\overline{B}_1 = 9*0,6 + 6*0,3 + 4*0,1 = 7,6;$$

$$\overline{B}_2 = 8*0,2 + 3*0,7 + 7*0,1 = 4,4;$$

$$\overline{B}_3 = 5*0,1 + 5*0,4 + 8*0,5 = 6,5.$$

Тогда $\overline{B} = \min\limits_i \{B_i\} = \max\{7,6;4,4;6,5\} = 7,6 = \overline{B}_1,$

т.е. оптимальной стратегией по этому критерию будет продажа изделия $C_1$.

Максиминный критерий Вальда:

$$W = \max_i \min_j B_{ij} = \max_i B_i^{\min}.$$

$$W = \max_i \{B_1^{\min}, B_2^{\min}, B_3^{\min}\} = \max\{6,3,5\} = 6 = B_1^{\min},$$

т. е. при продаже изделия $с_1$ гарантируется выигрыш даже в наихудших условиях.

Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица:

$$G = \max_i \left[ x B_i^{\min} + (1-x) B_i^{\max} \right],$$

где х - доля оптимизма-пессимизма (0,5).

$$G = \max_i [0,5\{6,3,5\} + 0,5\{9,8,8\}] = \max\{(3+4,5); (1,5+4); (2,5+4)\} =$$

$= \max\{7,5;5,5;6,5\} = 7,5,$ т. е. принимается решение о продажах $C_1$.

Критерий минимаксного риска Сэвиджа, по которому принимают решение минимальным значением риска в самой неблагоприятной ситуации:

$$S = \min_i \max_j r_{ij} = \min_i r_i^{\max},$$

где $r_i^{\max}$ вычислена по матрице рисков.

$$S = \min_i \{r_1^{\max}, r_2^{\max}, r_3^{\max}\} = \min\{5,5,3\} = 3,$$

что соответствует целесообразности в смысле этого критерия продажам изделия $с_3$.

Комплексный анализ всех критериев позволяет предположить, что наилучшей стратегией продаж будет продажа изделий $H_1, H_2, H_3, C_1, C_3$.. Изделие $с_2$ должно быть снято с продаж.

## 7.3. Сведение задач теории игр к задачам линейного программирования

Пусть задана платежная матрица игры

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для оптимальной стратегии первого игрока $u^0 = (u_1^0, u_2^0, ..., u_m^0$ и цены игры υ выполняется неравенство $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^0 \geq \upsilon (j = 1..n)$ или (разделив на $\upsilon$) $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \dfrac{u_i^0}{\upsilon} \geq 1$ (j=1..n), обозначая $\dfrac{u_i^0}{\upsilon} = y_i^0$ получим:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^0 \geq 1 (j = 1..n), \\ y_i^0 \geq 1 (i = 1..m; \upsilon \succ 0), \\ \sum_{i=1}^{m} y_i^0 = \dfrac{1}{\upsilon} \end{cases}$$

Так как первый игрок стремится получить максимальный выигрыш, то он должен обеспечить минимум величине $1/\upsilon$. С учетом этого определение оптимальной стратегии сводится к нахождению минимума функции $L_1 = \sum_{i=1}^{m} y_i$ при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq 1 (j = 1..n); y_i \geq 0 (i = 1..m).$$

Аналогично определение оптимальной стратегии второго игрока сводится к нахождению максимума функции $L_2 = \sum_{j=1}^{n} x_j$ при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1 (i = 1..m); x_j \geq 0 (j = 1..n),$$

где $= z_j / \upsilon$.

Таким образом, чтобы найти решение данной игры по матрице *A*, нужно составить следующую пару двойственных задач и найти их решение.

Прямая задача

$$\begin{cases} \max L = \sum_{j=1}^{n} x_j; \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1 (i = 1..m); \\ x_j \geq 0 (j = 1..n). \end{cases}$$

Двойственная задача

$$\begin{cases} \min L = \sum_{i=1}^{m} y_i \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq 1 (j = 1..n); \\ y_i \geq 0 (i = 1..m). \end{cases}$$

Используя решения пары задач, можно выявить оптимальные стратегии и цену игры:

$$u_i^0 = \frac{y_i^0}{\sum_{i=1}^{m} y_i^0} = \upsilon y_i^0;$$

$$z_j^0 = \frac{x_j^0}{\sum_{j=1}^{n} x_j^0} = \upsilon x_j^0;$$

$$\upsilon = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} x_j^0} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} y_i^0} (i = 1..m;\ j = 1..n).$$

Итак, решение игры с использованием методов линейного программирования включает этапы:

1) составляют пару двойственных задач, эквивалентных данной игре;

2) определяют оптимальные планы двойственных задач;

3) находят решение игры по соотношениям между планами задач, оптимальными стратегиями и ценой игры.

## Тема 8. Сетевые модели в экономике

### 8.1. Сущность, элементы и правила построения сетевых моделей

При планировании работ по созданию новой техники, реконструкции, техническому перевооружению и строительству предприятий, при разработке целевых программ широкое применение получили сетевые методы. Идея сетевых методов основана на графическом изображении комплекса работ, на выполнении элементарных арифметических операций по расчету параметров и на анализе результатов с целью разработки обоснованного варианта плана. Методы сетевого планирования дают возможность: заранее определить все действия, которые необходимо предпринять для достижения желаемого результата в будущем; предсказать вероятное время выполнения работ; улучшить план в случае, если предсказанное время выполнения работ неприемлемо; проверить ход выполнения работ по плану до того, как план приведен в действие; использовать информацию о ходе работ для своевременного планирования затрат времени и ресурсов.

Сетевое планирование предполагает построение сетевого графика (его еще называют сетевой диаграммой, сетевой моделью или просто сетью), состоящего из двух основных элементов: стрелок и кружков. Стрелками обозначаются работы, кружками – события.

Первые системы, использующие сетевые графики, были применены в США в конце 50-х годов XX века и получили название CPM (от англ. Critical Path Method – метод критического пути) и PERT (от англ. Program Evaluation and Revien Technique – метод оценки и обзора программы). В России работы по сетевому планированию начались в 60-х годах XX века.

Для того, чтобы составить план работ по реализации больших и сложных проектов, состоящих из множества взаимосвязанных видов работ или операций, необходимо описать его с помощью некоторой математической модели. Таким средством описания проектов является сетевая модель.

Сетевая модель представляет собой план выполнения некоторого комплекса взаимосвязанных работ или операций, заданного в форме сети, графическое изображение которой называют сетевым графиком.

Главными элементами сетевой модели являются события и работы.

Работа – это реальный процесс или действие, которое нужно выполнить, чтобы перейти от начального события к конечному. Работы могут выражаться в различных единицах времени: часах, днях, неделях, месяцах. Они могут иметь и количественные показатели: трудоемкость, стоимость, материальные ресурсы и др. Оценки времени и количественных показателей проставляются над стрелками.

Событием называется результат, получаемый после выполнения работы или работ, стрелки которых сходятся к данному кружку. Событие имеет двойственное значение: для всех предшествующих работ оно является законченным свершением, а для последующих работ – начальным пунктом их выполнения. Событие не является процессом, поэтому не имеет продолжительности во времени.

Всем событиям присваивается цифровой шифр, который проставляется внутри кружка. Работы обозначаются цифрами их начальных и конечных событий. В общем виде начальное событие обозначается буквой i, конечное – буквой j, а работа – двумя буквами i, j.

Работа на сетевом графике может иметь три значения:

1) действительная работа, т.е. процесс, требующий затрат времени, труда, материальных и других ресурсов;

2) ожидание – работа, не требующая затрат труда и ресурсов, но требующая затрат времени;

3) фиктивная работа (или зависимость работ) показывающая, что начало одной работы зависит от окончания другой (других); фиктивные работы не требуют ни затрат времени, ни труда, ни ресурсов.

Действительные работы и ожидания на сетевом графике изображаются сплошными стрелками, а фиктивные – пунктирными.

Последовательность работ образует путь. Пути могут быть полными и неполными (частичными). Полный путь – это непрерывная последовательность работ от исходного события до завершающего.

На сетевом графике бывают два особых события: исходное и завершающее. Исходное – это момент начала, а завершающее – момент завершения выполнения комплекса работ. Сетевой график может иметь как несколько исходных, так и несколько завершающих событий.

При построении сетевых графиков необходимо соблюдать ряд правил:

1) правила кодирования: все события имеют самостоятельные номера: кодируются события числами натурального ряда; номер последующему событию присваивается после присвоения номеров предшествующим ему

событиям; стрелка всегда должна быть направлена от события с меньшим номером к событию с большим номером;

2) на сетевом графике не должно быть тупиков, т.е. событий, из которых не выходит ни одна работа (кроме завершающего события);

3) сеть не должна иметь событий, в которые не входит ни одна работа (кроме исходного события);

4) на сетевом графике не допускаются работы, с одинаковыми шифрами;

5) правильно должны быть изображены дифференцированно-зависимые, работы (работы называются дифференциально-зависимыми, когда для выполнения одной из работ необходимо получить результаты двух и более работ, а для другой работы достаточно иметь результат только одной из них). Для правильного изображения таких работ в сеть вводятся дополнительное событие и фиктивная работа (см. рис. 1).

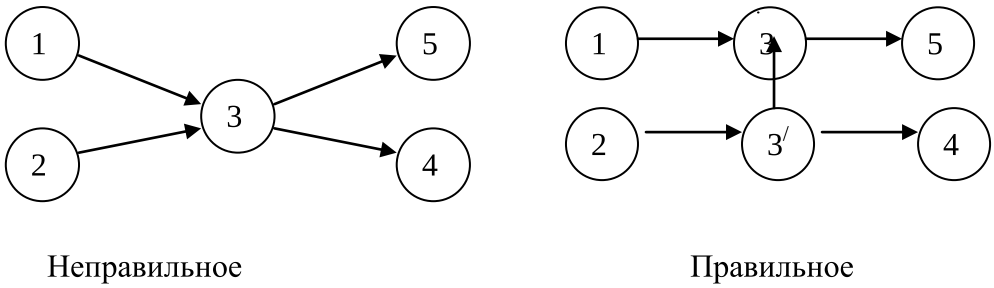


Рис.8.1. Изображение дифференцированно-зависимых работ на сетевом графике

При планировании и управлении большими и сложными системами разработка сетевого графика производится следующим образом: составляется иерархическая структура системы; для каждого элемента структуры своя отдельная сеть; элементы сети нижнего уровня “сшиваются” в элемент сети высшего уровня до тех пор пока, не будет получена общая сеть всей системы работ. ”Сшивание” сети начинается с завершающего события, постепенно приближаясь к исходному.

## 8.2. Основные параметры сетевых моделей и методика их расчета

К основным параметрам сетевых моделей относятся: оценки времени работ, продолжительность путей, критический путь, резервы времени некритических путей, сроки свершения событий, резервы времени событий,  сроки начала и окончания работ, резервы времени работ, коэффициенты свободы и напряжения работ и др.

Как отмечалось выше, каждая работа (действительное и ожидание) требует затрат времени, т.е. имеет продолжительность. Эта продолжительность может быть определенной или неопределенной. В первом случае оценка времени называется детерминистической, во втором – вероятностной или ожидаемой. Для расчета вероятностной (ожидаемой) продолжительности работ могут применяться различные методы. Один из них основывается на трех оценках времени: оптимистической (То), пессимистической (Тп) и наиболее вероятной (Тнв). Оптимистическая оценка времени – это продолжительность выполнения работы в наиболее благоприятных условиях; пессимистическая оценка времени – это время, необходимое для выполнения работы в неблагоприятных условиях; наиболее вероятная оценка времени – это возможное время выполнения работы в нормальных условиях. При этом методе ожидаемое время выполнения работ (Тож) определяется по одной из следующих формул:

$$Тож = \frac{То + 4 * Тнв + Тп}{6} \quad \text{или} \quad Тож = \frac{2 * То + 3 * Тп}{5}$$

При этом погрешность характеризуется дисперсией, определяемой соответственно по формулам:

$$\sigma = \frac{(То - Тп)^2}{6} \qquad \text{и} \qquad \sigma = \frac{(То - Тп)^2}{5}.$$

В тех случаях, когда затруднено или невозможно установить три или две оценки времени, Тож можно определить методом экспертных оценок. При этом методе группа квалифицированных экспертов–специалистов независимо друг от друга определяет наиболее реальное, по их мнению, время выполнения работ. Расчет окончательной ожидаемой оценки времени производится по формуле

$$Тож = \frac{\sum T_i * N_i}{M * N},$$

где М – число экспертов; $T_i$ – оценка времени i- экспертом; $N_i$ – число исполнителей, принимаемое i – м экспертом при определении оценки времени $T_i$; N – проектируемое число исполнителей.

Указанные способы расчета ожидаемой оценки работ применимы и для определения стоимостных оценок и потребностей в ресурсах.

Методику расчета параметров сетевых графиков проиллюстрируем на примере конкретного сетевого графика, состоящего из 9 событий и 15 работ (рис. 8.2). Работа выражается временем в днях.

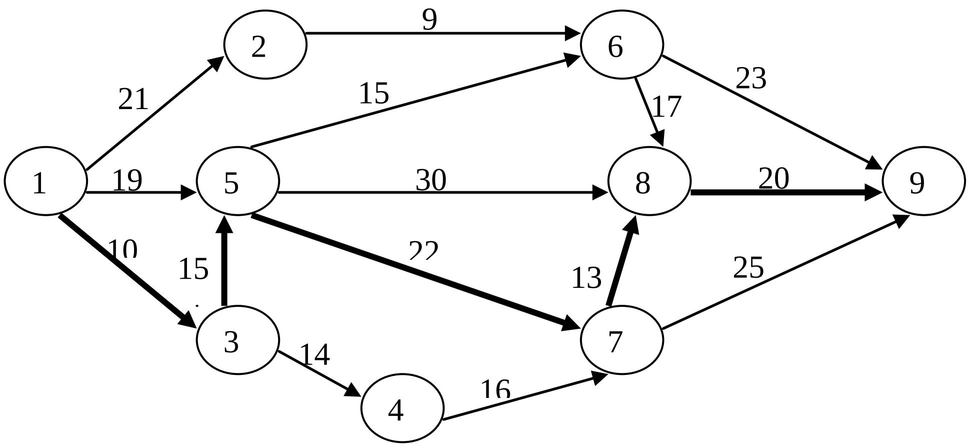


Рис. 8.2. Пример сетевого графика

Продолжительность пути – это сумма продолжительности всех работ, образующих этот путь. Если путь обозначить буквой L с шифрами его событий, то продолжительность путей сетевого графика, изображенного на рис. 8.2 равна (в днях):

| | |
|---|---|
| L(1,2,6,9) = 53 | L(1,3,5,6,9) = 63 |
| L(1,2,6,8,9) = 67 | L(1,3,5,6,8,9) = 77 |
| L(1,5,6,9) = 57 | L(1,3,5,8,9) = 75 |
| L(1,5,6,8,9) = 71 | L(1,3,5,7,8,9) = 80 |
| L(1,5,8,9) = 69 | L(1,3,5,7,9) = 72 |
| L(1,5,7,8,9) = 74 | L(1,3,4,7,8,9) = 73 |
| L(1,5,7,9) = 66 | L(1,3,4,7,9) = 65 |

Путь, имеющий наибольшую продолжительность, называется критическим. Критический путь – один из основополагающих параметров сетевого графика. На рис.2 критический путь имеет продолжительность равную 80 дням. Все остальные пути называются некритическими.

Увеличение критического пути приводит к удлинению срока выполнения всего комплекса работ, для которого построен сетевой график. В отличие от критического, увеличения некритических путей не всегда сопровождается удлинением всего комплекса работ. Иными словами: все некритические пути имеют резервы времени, которые показывают, на сколько времени может быть увеличена продолжительность того или иного пути без нарушения сроков завершения всего комплекса работ. Резервы времени путей (P(L)) определяются путем вычитания из продолжительности критического пути (Ткр) продолжительности данного некритического пути (T(L)), т.е.

$$P(L)=Tкр-T(L) .$$

Так, например, для пути L(1,2,6,9) резерв времени равен 27 дням (80-53), для пути L(1,3,5,7,9) – 8 дням (80-72) и т. д.

К параметрам событий относятся сроки их наиболее раннего и наиболее позднего свершения, а также резервы времени.

Сроки наиболее раннего (Тр(i)) и наиболее позднего (Тп(i)) свершения событий по следующим формулам:

$$Tр(i)=T(Lk,i)\ max; \qquad Tn(i)=Tкр-T(Li,c)\ max,$$

где T(Lk,i) max – продолжительность максимального пути от исходного события (k) до данного события (i); T(Li,c) max – продолжительность максимального пути от данного события (i) до завершающего события (c); Ткр – продолжительность критического пути. Резерв времени события P(i) определяется путем вычитания из времени позднего свершения события времени раннего свершения события, т.е.

$$P(i)= Tn(i)-Tр(i).$$

В качестве примера определим резерв времени события 6:

Р(6)=Тп(6)-Тр(6)=[(Ткр-Т(L 6,9) max )-Т(L1,6) max]=[(80-37)-40]=3 дня.
События критического пути резервов времени не имеют. Для таких событий строки раннего и позднего свершения равны, т.е

$$Тр(i)=Тп(i).$$

Например, для событий 7

$$Тр(7)=Т(L1,7) max=47 дней$$

$$Тп(7)=Ткр-Т(L7,9)max = 80-33=47 дней; Р(7)=0.$$

Резерв времени события показывает, на какое время можно задержать свершение данного события, не вызывая при этом увеличения общего срока выполнения комплекса работ.

Резерв времени события можно определить и через продолжительность пути, на котором находится данное событие. Для этого из продолжительности критического пути вычитается продолжительность максимального пути, проходящего через данное событие, т.е. определяется по формуле

$$Р(i)=Ткр-Т(Lk,i,c)) max,$$

где k,i,c – соответственно исходное, данное и завершающее события. Так, резерв времени события 6 равен

$$Р(6)=Ткр-Т(L1,6,9)) max =80-77=3 дня.$$

К параметрам работ относятся сроки начала и окончания работ, резервы времени работ, коэффициенты свободы и напряжения. Сроки начала и окончания работ.

Различают сроки раннего и позднего начала и окончания работы.
Срок раннего начала работы (Тр.н.(i,j)) равен сроку раннего свершения начального для этой работы события (Тр(i)), т.е.

$$Тр.н. (i,j)=Тр(i).$$

Срок раннего окончания (Тр.о.(i,j)) работы равен сумме срока раннего свершения начального для этой работы события и продолжительности данной работы (Т(i,j)):

$$Тр.о.(i,j)=Тр(i)+Т(i,j).$$

Срок позднего окончания работы (Тп.о.(i,j)) совпадает со сроком позднего свершения конечного для этой работы события (Тп(j)), т.е.

$$Тп.о.(i,j)=Тп(j).$$

Срок позднего начала работы Тп.н (i,j) совпадает со сроком позднего свершения конечного для данной работы события и продолжительности этой работы:

$$Тп.о.(i,j)=Тр(j)-Т(i,j).$$

Например, работа (5,6) будет иметь срок раннего начала такой же, как и срок раннего свершения начального для этой работы события 5, а именно

$$Тр.н.(5,6)=Тр(5)=25 дней$$

Срок раннего окончания работы (5,6) совпадает со сроком позднего свершения события 5 и продолжительности этой работы:

$$Тр.о.(5,6)=Тр(5)+Т(5,6)=25+15=40 дней.$$

Срок позднего окончания работы (5,6) совпадает со сроком позднего свершения конечной для данной работы события 6, т.е.

$$Тп.о.(5,6)=Тп(6)=43 дня.$$

Для получения срока позднего начала работы (5,6) нужно из срока позднего свершения конечного для этой работы события 6 вычесть продолжительность этой работы:

Тп.н.(5,6)-Т(5,6)=43-15=28 дней.

Полный, частные и свободный резервы времени работ. Различают полный, частные и свободный резервы работ.

Полный резерв времени работы (Рп(i,j)) можно определить как разность между поздним и ранним сроками начала или поздним и ранним сроками окончания работы:

Рп(i,j)=Тп.н.(i,j)-Тр.н.(i,j) или Рп(i,j)=Тп.о.(i,j)-Тр.о.(i,j).

Определим, например, полный резерв времени для работы (5,6):

Рп(5,6)=Тп.н.(5,6) – Тр.н. (5,6) =28-25=3 дня

или Рп(5,6)=Тп.о.(5,6) Тр.о.(5,6)=(5,6)=43-40=3 дня.

Полный резерв времени можно определить также вычитанием из критического пути продолжительности максимального пути, проходящего через эту работу. Иными словами, резерв времени любой работы совпадает с резервом времени максимального пути, проходящего через данную работу, т.е.

Рп(i,j)=Р(Lk,i,j,c) max,

где k,c – начальное и конечное событие сетевого графика;
i,j - начальное и конечное событие работы.

Так, например, резерв времени работы (5,6) по этому методу равен

Рп(5,6)=Р(L1,5,6,9) max=80-77= 3 дня.

Частные резервы времени имеют работы, у которых начальное или конечное событие является общим. Частные резервы бывают двух видов: первого вида ($Р^{/}$п(i,j)) и второго вида ($Р^{//}$п(i,j)).

Частный резерв первого вида могут иметь работы, следующие за общим начальным событием. Он представляет собой часть полного резерва времени работы, которую можно использовать на увеличение продолжительности данной работы (и в определенных размерах следующих за ней работ), не вызывая при этом сокращения резервов времени ни у одной из предшествующих работ. Частный резерв времени первого вида равен разности между полным резервом времени и резервом времени начального события:

$Р^{/}$п(i,j)=Рп(i,j)-Р(i).

Так, частный резерв времени первого вида для работы (6,9) равен

$Р^{/}$п(6,9)=Рп(6,9)-Р(6)=17-3=14 дней.

Частный резерв времени второго вида образуется у работ, предшествующих общему конечному событию. Он представляет собой часть полного резерва времени работы, которую можно использовать на увеличение продолжительности данной работы, не вызывая при этом сокращения резервов времени ни у одной из последующих работ. Он равен разности между полным резервом времени работы и резервом времени конечного для данной работы события:

$Р^{//}$п(i,j)=Рп(i,j)-Р(j).

Так, частный резерв времени второго вида для работы (6,9) равен

$$P'n(6,9)=Pn(6,9)-P(9)=17-0=17 \text{ дней}.$$

Отдельные работы сетевого графика могут иметь так называемый свободный резерв времени, который в отличие от частных резервов времени может быть использован только для той работы, которая его имеет. Этот резерв не может быть использован ни для одной из предшествующих ей и следующих за ней работ. Свободный резерв времени работы (Pc(i,j)) определяется вычитанием из полного резерва времени резервов времени начального и конечного для данной работы событий:

$$Pc(i,j)=Pn(i,j)-P(i)-P(j).$$

Свободный резерв времени для работы (6,9), например, равен

$$Pc(6,9)=Pn(6,9)-P(6)-P(9)=17-3-0=14 \text{ дней}.$$

Свободный резерв времени работы может иметь отрицательное значение, которое показывает, сколько времени не будет хватать для выполнения работы к сроку раннего свершения ее конечного события, если работа будет начата с момента позднего свершения ее начального события.

Коэффициент свободы и напряжения работ.

Свободный резерв времени выражается и относительной величиной, называемой коэффициентом свободы. Коэффициент свободы для работы (Кс(i,j)) определяется по формуле:

$$Кс(i,j)=\frac{Tp(j)-Tn(i)}{T(i,j)}.$$

Так, для работы (6,9) коэффициент свободы равен:

$$Кс(6,9)=\frac{Tp(9)-Tn(6)}{T(6,9)}=\frac{80-43}{23}=1,61.$$

К важным параметрам сетевого графика относится показатель, характеризующий напряженность сроков выполнения работ, называемый коэффициент напряжения (Кн(i,j)), который определяется по формуле

$$Кн(i,j)=\frac{T(Lk,i,j,c)max-Tk'p}{Tkp-Tk'p},$$

где T(Lk,i,j,c)) max – продолжительность максимального пути проходящего через данную работу; Tk/p – продолжительность отрезков максимального пути, проходящего через данную работу, которые лежат на критическом пути; Tkp – продолжительность критического пути.

Рассчитаем, например, коэффициент напряжения для работы (6,9):

$$Кн(6,9)=\frac{(10+15+15+23)-(10+15)}{80-(10+15)}=0,69.$$

Величина коэффициента напряжения работы должна удовлетворять условию $0 \le Кн(i,j) \le 1$.

## Тема 9. Элементы теории массового обслуживания в экономике

### 9.1. Основные понятия. Классификация СМО

При исследовании операций часто приходится сталкиваться с системами, предназначенными для многоразового использования при решении однотипных задач. Возникающие при этом процессы получили название процессов обслуживания, а системы - систем массового обслуживания (СМО). Примерами таких систем являются телефонные системы, вычислительные комплексы, магазины, парикмахерские и т.п.

Каждая СМО состоит из определенного числа обслуживающих единиц, которые будем называть каналами обслуживания. Каналами могут быть линии связи, рабочие точки, вычислительные машины, продавцы и др. По числу каналов СМО подразделяют на одноканальные и многоканальные.

Заявки поступают в СМО обычно не регулярно, а случайно, образуя так называемый случайный поток заявок (требований). Случайный характер потока заявок и времени обслуживания приводит к тому, что СМО оказывается загруженной неравномерно.

Теория массового обслуживания обеспечивает построение математических моделей, связывающих заданные условия работы СМО (число каналов, их производительность, характер потока заявок и т.п.) с показателями эффективности СМО (среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени; среднее число заявок в очереди; среднее время ожидания обслуживания; вероятность отказа в обслуживании без ожидания; вероятность того, что число заявок в очереди превысит определенное значение и т.п.).

СМО делят на два основных типа: СМО *с отказами* и СМО *с ожиданием (очередью).* В СМО с отказами заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ, покидает СМО и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует. В СМО с ожиданием заявка, пришедшая в момент, когда все каналы заняты, не уходит, а становится в очередь на обслуживание.

СМО с ожиданием подразделяются на разные виды в зависимости от того, как организована очередь: с ограниченной или неограниченной длиной очереди, с ограниченным временем ожидания и т.п.

Для классификации СМО важное значение имеет дисциплина обслуживания, определяющая порядок выбора заявок из числа поступивших и порядок распределения их между свободными каналами. По этому признаку обслуживание заявки может быть организовано по принципам:

- "первая пришла - первая обслужена";
- "последняя пришла - первая обслужена" ;
- обслуживание с приоритетом.

Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс.

Под случайным процессом понимается процесс изменения во времени состояния какой-либо системы в соответствии с вероятностными закономерностями.

Процесс называется процессом с дискретными состояниями, если его возможные состояния $S_1$, $S_2$, $S_3$ … можно заранее перечислить, а переход системы из состояния в состояние происходит мгновенно (скачком). Процесс называется процессом с непрерывным временем, если моменты возможных переходов системы из состояния в состояние не фиксированы заранее, а случайны.

Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем.

Математический анализ работы СМО существенно упрощается, если процесс этой работы - марковский. Случайный процесс называется марковским или случайным процессом без последствия, если для любого момента времени вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.

В природе нет чисто марковских процессов, но многие процессы можно приближенно считать марковскими.

При анализе случайных процессов с дискретными состояниями удобно пользоваться геометрической схемой - так называемым графом состояний. Обычно состояния системы изображаются прямоугольниками (кружками), а возможные переходы из состояния в состояние - стрелками (ориентированными дугами), соединяющими состояния.

Пример. Пусть требуется построить граф состояний следующего случайного процесса: устройство $S$ состоит из двух узлов, каждый из которых в случайный момент времени может выйти из строя, после чего мгновенно начинается ремонт узла, продолжающийся заранее неизвестное случайное время.

Решение. Возможные состояния системы: $S_0$ - оба узла исправны; $S_1$ - первый узел ремонтируется, второй исправен; $S_2$ - второй узел ремонтируется, первый исправен; $S_3$ - оба узла ремонтируются. Граф системы приведен на рис.1.

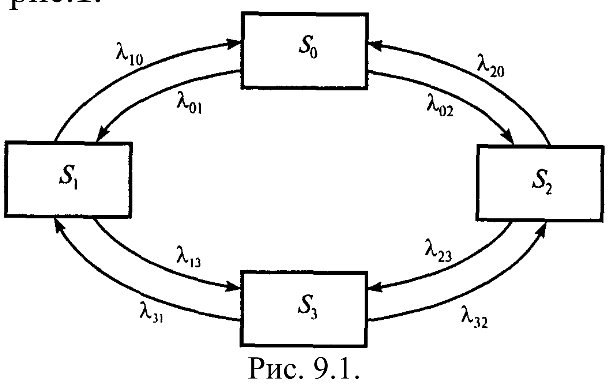

Рис. 9.1.

Стрелка, направленная, например, из $S_0$ в $S_1$, означает переход системы в момент отказа первого узла, из $S_1$ в $S_0$ - переход в момент окончания ремонта этого узла.

Важным понятием в теории массового обслуживания является понятие потока событий. Под потоком событий понимается последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени.

Поток характеризуется интенсивностью λ - частотой появления событий или средним числом событий, поступающих в СМО в единицу времени.

Поток событий может быть регулярным, если события следуют одно за другим через определенные, равные промежутки времени, или стационарным, если его вероятностные характеристики не зависят от времени. В частности, интенсивность стационарного потока есть величина постоянная: $\lambda(t)=\lambda$.

Поток событий называется потоком без последействия, если для любых двух участков времени $\iota_1$ и $\iota_2$ - число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другие.

Поток событий называется ординарным, если события появляются в нем поодиночке.

Поток событий называется простейшим (или стационарным пуассоновским), если он одновременно стационарен, ординарен и не имеет последействия.

При наложении достаточно большого числа *n* независимых, стационарных и ординарных потоков (сравнимых между собой по интенсивностям $\lambda_i$ *(i=l,2,...,n)* получается поток, близкий к простейшему с интенсивностью, равной сумме интенсивностей входящих потоков, т.е.

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i .$$

Рассмотрим математическое описание марковского процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем на примере случайного процесса из вышеприведенного примера (рис. 9.1). Будем полагать, что все переходы системы из состояния $S_i$, в $S_j$ происходят под воздействием простейших потоков событий с интенсивностями $\lambda_{ij}$ (i, j=0, 1, 2, 3); так, переход системы из состояния $S_0$ в $S_1$ будет происходить под воздействием потока отказов первого узла, а обратный переход из состояния $S_1$ в $S_0$ - под воздействием потока "окончаний ремонтов" первого узла и т.п.

Граф состояний системы с проставленными у стрелок интенсивностями будем называть размеченным. Рассматриваемая система S имеет четыре возможных состояния:$S_0$, $S_1$, $S_2$, $S_3$.

Вероятностью i-го состояния называется вероятность $p_i(t)$ того, что в момент *t* система будет находиться в состоянии $S_i$.

Очевидно, что для любого момента *t* сумма вероятностей всех состояний равна единице:

$$\sum_{i=0}^{3} p_i(t) = 1. \qquad (9.1)$$

Система дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\begin{cases} p'_0 = \lambda_{10} p_1 + \lambda_{20} p_2 - (\lambda_{01} + \lambda_{02}) p_0, \\ p'_1 = \lambda_{01} p_0 + \lambda_{31} p_3 - (\lambda_{10} + \lambda_{13}) p_1, \\ p'_2 = \lambda_{02} p_0 + \lambda_{32} p_3 - (\lambda_{20} + \lambda_{23}) p_2, \\ p'_3 = \lambda_{13} p_1 + \lambda_{23} p_2 - (\lambda_{31} + \lambda_{32}) p_3. \end{cases} \qquad (9.2)$$

В системе (9.2) независимых уравнений на единицу меньше общего числа уравнений. Поэтому для решения системы необходимо добавить уравнение (9.1).

Уравнения Колмогорова дают возможность найти все вероятности состояний как функции времени. Особый интерес представляют вероятности системы $p_i(t)$ в предельном стационарном режиме, т.е. при $t \to \infty$, которые называются предельными вероятностями состояний.

В теории случайных процессов доказывается, что если число состояний системы конечно и из каждого из них можно (за конечное число шагов) перейти в любое другое состояние, то предельные вероятности существуют.

Предельная вероятность состояния $S_i$, имеет четкий смысл: она показывает среднее относительное время пребывания системы в этом состоянии. Например, если предельная вероятность состояния $S_0$, т.е. $p_0$=0,5, то это означает, что в среднем половину времени система находится в состоянии $S_0$.

Так как предельные вероятности постоянны, то, заменяя в уравнениях Колмогорова их производные нулевыми значениями, получим систему линейных алгебраических уравнений, описывающих стационарный режим. Для системы S с графом состояний, изображенном на рис. 1, такая система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} O = \lambda_{10} p_1 + \lambda_{20} p_2 - (\lambda_{01} + \lambda_{02}) p_0, \\ O = \lambda_{01} p_0 + \lambda_{31} p_3 - (\lambda_{10} + \lambda_{13}) p_1, \\ O = \lambda_{02} p_0 + \lambda_{32} p_3 - (\lambda_{20} + \lambda_{23}) p_2, \\ O = \lambda_{13} p_1 + \lambda_{23} p_2 - (\lambda_{31} + \lambda_{32}) p_3. \end{cases} \qquad (9.3)$$

## 9.2. СМО с отказами и ожиданием

СМО с отказами. В качестве показателей эффективности СМО с отказами будем рассматривать:

*A* - абсолютную пропускную способность СМО, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;

*Q* - относительную пропускную способность, т.е. среднюю долю пришедших заявок, обслуживаемых системой;

$P_{отк.}$ - вероятность отказа, т.е. того, что заявка покинет СМО необслуженной;

$\bar{k}$ - среднее число занятых каналов (для многоканальной системы).

Рассмотрим задачу одноканальной системы обслуживания с отказами. Пусть имеется один канал, на который поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda$. Поток обслуживаний имеет интенсивность $\mu$ . Требуется найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности.

Система S (СМО) имеет два состояния: $S_0$ - канал свободен, $S_1$ - канал занят. Размеченный граф состояний представлен на рис. 9.2.

В предельном, стационарном режиме система алгебраических уравнений для вероятностей состояний имеет вид.

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1, \\ \mu p_1 = \lambda p_0, \end{cases} \qquad (9.4)$$

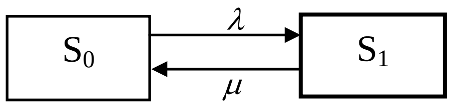


Рис. 9.2

т.е. система вырождается в одно уравнение.

Учитывая нормировочное условие $p_0 + p_1 = 1$, найдем из (9.4) предельные вероятности состояний

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \; p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \qquad (9.5)$$

которые выражают среднее относительное время пребывания системы в состоянии $S_0$ (когда канал свободен) и $S_1$ (когда канал занят), т.е. определяют соответственно относительную пропускную способность *Q* системы и вероятность отказа $P_{отк.}$.

$$Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \qquad (9.6) \qquad\qquad P_{отк.} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \qquad (9.7)$$

Абсолютную пропускную способность найдем, умножив относительную пропускную способность *Q* на интенсивность потока отказов

$$A = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}. \qquad (9.8)$$

Пусть имеется *n* каналов, на которые поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda$. Поток обслуживания имеет интенсивность $\mu$. Требуется найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности.

Система S (СМО) имеет следующие состояния (нумеруем их по числу заявок, находящихся в системе): $S_0$, $S_1$, $S_2$, ..., $S_k$, ... $S_n$, где $S_k$ - состояние системы, когда в ней находится k заявок, т.е. занято k каналов. Граф состояний СМО соответствует процессу гибели и размножения и показан на рис.9.3.

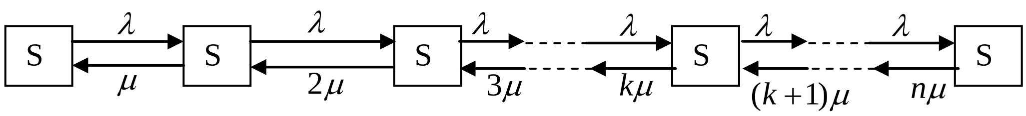


Рис. 9.3

Для расчета предельных вероятностей состояния можно использовать формулы процесса гибели и размножения:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^k}{k!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1},$$

$$p_1 = \rho p_0,\ p_2 = \frac{\rho^2}{2!}p_0, \ldots, p_k = \frac{\rho^k}{k!}p_0, \ldots, p_n = \frac{\rho^n}{n!}p_0. \qquad (9.9)$$

где $\rho = \lambda / \mu$ - приведенная интенсивность потока заявок или интенсивность нагрузки канала.

Формулы (9.9) для предельных вероятностей получили название формул Эрланга (Эрланг А.К. (конец XIX в. - начало XX в.) - датский инженер, математик - основатель теории массового обслуживания).

Вероятность отказа СМО, относительная и абсолютная пропускная способность, а также среднее число занятых каналов рассчитываются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} &P_{отк.} = \frac{\rho^m}{m!}p_0; \qquad Q = 1 - P_{отк} = 1 - \frac{\rho^n}{n!}P_0; \\ &A = \lambda Q = \lambda\left(1 - \frac{\rho^n}{n!}p_0\right); \qquad \bar{k} = \sum_{k=0}^{n} k p_k. \end{aligned}\right\} \qquad (9.10)$$

где $p_k$ - предельные вероятности состояний, (см. формулы (9.9) .

Среднее число занятых каналов можно найти и по формуле

$$k = \rho\left(1 - \frac{\rho^n}{n!}p_0\right). \qquad (9.11)$$

СМО с ожиданием. В качестве показателей эффективности СМО с ожиданием (или очередью) кроме четырех вышеперечисленных выше применяются и следующие:

$L_{сист}$ - среднее число заявок в системе;

$T_{сист}$. - среднее время пребывания заявки в системе;

$L_{оч}$ - среднее число заявок в очереди или длина очереди;

$T_{оч}$ - среднее время пребывания заявки в очереди;

$P_{зан.}$ - вероятность того, что канал занят или степень загрузки канала.

СМО с ожиданием могут быть с неограниченной или ограниченной очередью. СМО с неограниченной очередью могут быть одно – или многоканальными.

Рассмотрим одноканальную систему с неограниченной очередью.

Пусть имеется одноканальная СМО с очередью, на которую не наложены никакие ограничения (ни по длине очереди, ни по времени ожидания). Поток заявок, поступающих в СМО, имеет интенсивность λ, а поток обслуживании - интенсивность μ. Требуется найти предельные вероятности состояний и показатели эффективности СМО.

Система может находиться в одном из состояний $S_0$, $S_1$, $S_2$, ..., $S_k$ (рис.

9.4), по числу заявок, находящихся в СМО: $S_0$ - канал свободен; $S_1$ - канал занят (обслуживает заявку), очереди нет; $S_2$ - канал занят, одна заявка стоит в очереди; ... $S_k$ - канал занят, (k-l) заявок стоят в очереди и т.д.

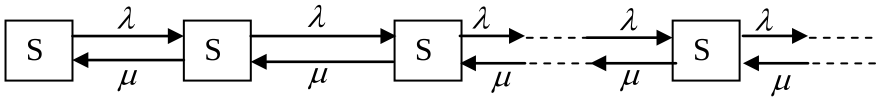


Рис. 9.4

Это процесс гибели и размножения, но с бесконечным числом состояний, в котором интенсивность потока заявок равна λ, а интенсивность потока обслуживании μ.

Доказано, что если ρ < 1, т.е. среднее число приходящих заявок меньше среднего числа обслуженных заявок (в единицу времени), то предельные вероятности существуют. Если ρ ≥ 1, очередь растет до бесконечности.

Предельные вероятности состояний можно определить по формулам:

$$\left.\begin{aligned} &p_o = (1+\rho+\rho^2+\ldots+\rho^k+\ldots)^{-1}, \\ &p_1 = \rho(1-\rho),\, p_2 = \rho^2(1-\rho),\ldots,\, p_k = \rho^k(1-\rho)\ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (9.12)$$

Правая часть в формуле (12) представляет собой геометрический ряд со знаменателем ρ < 1, равный $\dfrac{1}{1-\rho}$. Поэтому $p_0 = 1-\rho$ (9.13)

Предельные вероятности $p_0$, $p_1$, $p_2$, ..., $p_k$, ... образуют убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $\rho<1$, следовательно, вероятность $p_0$ - наибольшая. Это означает, что если СМО справляется с потоком заявок (при $\rho<1$), то наиболее вероятным будет отсутствие заявок в системе.

Формулы для расчета показателей эффективности:

$$L_{сист.} = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k = (1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k \qquad (9.14)$$

$$L_{сист.} = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad (9.15)$$

$$L_{оч.} = L_{сист.} + L_{об}, \qquad (9.16)$$

где $L_{об}$. - среднее число заявок, находящихся под обслуживанием.

$L_{об.} = 0\cdot p_0 + 1(1-p_0)$

Откуда

$L_{об.} = 1-p_0$ или $L_{об.} = \rho$ (9.17)

На основе формул (15), (16) и (17) получим,

$$L_{оч.} = \frac{\rho^2}{1-\rho} \qquad (9.18)$$

Доказано, что при любом характере потока заявок, при любом распределении времени обслуживания, при любой дисциплине обслуживания среднее время пребывания заявки в системе (очереди) равна среднему числу заявок в системе (в очереди), деленному на интенсивность потока заявок, т.е.

$$T_{сист.}=\frac{1}{\lambda}L_{сист.},\qquad T_{оч.}=\frac{1}{\lambda}L_{оч.}. \qquad (9.19)$$

Формулы (19) называются формулами Литтла.

Подставляя в формулу (9.19) значения $L_{сист}$. и $L_{оч}$. из (9.15) и (9.18) получим формулы для определения времени пребывания заявки в системе и среднего времени пребывания заявки в очереди -

$$T_{сист.}=\frac{\rho}{\lambda(1-\rho)},\qquad T_{оч.}=\frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}. \qquad (9.20)$$

Рассмотрим задачу многоканальной СМО с неограниченной очередью. Пусть имеется n-канальная СМО с неограниченной очередью. И пусть поток заявок, поступающих в СМО, имеет интенсивность $\lambda$, а поток обслуживаний - интенсивность $\mu$. Требуется найти предельные вероятности состояний СМО и показатели ее эффективности.

Система может находиться в одном из состояний $S_0$, $S_1$, $S_2$, ..., $S_k$, ..., $S_n$, ..., нумеруемых по числу заявок, находящихся в СМО: $S_0$ - в системе нет заявок (все каналы свободны); $S_1$ - занят один канал, остальные свободны; $S_2$ - заняты два канала, остальные свободны; ..., $S_k$ - занято k каналов, остальные свободны; ..., $S_n$ - заняты все n каналов (очереди нет); $S_{n+1}$ - заняты все п каналов, в очереди одна заявка; .... $S_{n+r}$ - заняты все n каналов, r заявок стоит в очереди, ... .

Граф состояний системы показан на рис. 7.4. В отличие от предыдущей СМО, интенсивность потока обслуживании (переводящего систему из одного состояния в другое справа налево) не остается постоянной, а по мере увеличения числа заявок в СМО от 0 до n увеличивается от величины $\mu$ до n$\mu$, так как соответственно увеличивается число каналов обслуживания. При числе заявок в СМО большем, чем n, интенсивность потока обслуживании сохраняется равной n$\mu$.

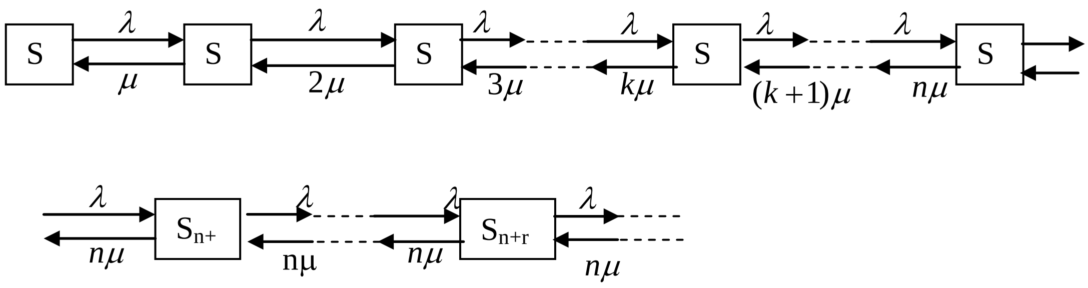


Рис.9.5

Можно показать, что при $\rho$/n < 1 предельные вероятности существуют. Если $\rho$/n$\geq$1, очередь растет до бесконечности.

Как и в случае одноканальной СМО с очередью, можно получить формулы для определения:

а) вероятности того, что заявка окажется в очереди,

$$P_{оч.}=\frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}p_0. \qquad (9.21)$$

б) среднего числа занятых каналов

$$\bar{k}=\frac{\lambda}{\mu}=\rho, \qquad (9.22)$$

в) среднего числа заявок в очереди

$$L_{оч.}=\frac{\rho^{n+1}p_0}{n\cdot n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}, \qquad (9.23)$$

г) среднего числа заявок в системе

$$L_{сист.}=L_{оч.}+\rho. \qquad (9.24)$$

Среднее время пребывания заявки в очереди и среднее время пребывания заявки в системе находятся по формулам Литтла (9..19).

СМО с ограниченной очередью отличаются от рассмотренных выше задач лишь тем, что число заявок в очереди ограничено (не может превосходить некоторого заданного m). Если новая заявка поступает в момент, когда все места в очереди заняты, она покидает СМО необслуженной, т.е. получает отказ.

Для вычисления предельных вероятностей состояний и показателей эффективности таких СМО может быть использован тот же подход, что и выше, с той разницей, что суммировать надо не бесконечную прогрессию, а конечную.

Основное допущение, при котором анализировались рассмотренные выше СМО, состоит в том, что все потоки событий, переводящие их из состояния в состояние, были простейшими. При нарушении этого требования общих аналитических методов для таких систем не существует. Имеются лишь отдельные результаты, позволяющие выразить в аналитическом виде характеристики СМО через параметры задачи.

В случаях, когда для анализа работы СМО аналитические методы не применимы, используют универсальный метод статистического моделирования, называемый методом Монте-Карло.

Идея метода Монте-Карло состоит в том, что вместо аналитического описания СМО производится "розыгрыш" случайного процесса, проходящего в СМО, с помощью специально организованной процедуры. В результате такого "розыгрыша" получается каждый раз новая, отличная от других, реализация случайного процесса. Это множество реализаций можно использовать как некий искусственно полученный статистический материал, который обрабатывается обычными методами математической статистики. После такой обработки могут быть получены приближенно любые характеристики обслуживания.

Например, необходимо проанализировать очереди, возникающие в магазине, для решения вопроса о расширении магазина. Время подхода покупателей и время их обслуживания носят случайный характер, и их распределения могут быть установлены по имеющейся информации. В результате взаимодействия этих случайных процессов создается очередь.

Согласно методу Монте-Карло перебирают (с помощью ЭВМ) все возможные состояния системы с различным числом покупателей в час, временем их обслуживания и т.п., сохраняя те же характеристики распределения. В результате многократного искусственного воссоздания работы магазина рассчитывают характеристики обслуживания, как если бы они были получены при наблюдении над реальным потоком покупателей.

При моделировании случайных явлений методом Монте-Карло мы пользуемся самой случайностью как аппаратом исследования. Можно отметить, что для сложных систем обслуживания с немарковским случайным процессом метод статистического моделирования, как правило, оказывается проще аналитического.

# Модуль IV Математические основы анализа финансовых операций и актуарных расчетов

## Тема 10. Математические основы финансового анализа.

### 10.1 Время, неопределенность и дисконтирование в финансовом анализе.

В практических финансовых операциях суммы денег вне зависимости от их назначения или происхождения обязательно связываются с конкретными моментами или периодами времени. Для этого в контрактах фиксируются соответствующие сроки, даты, периодичность выплат. Необходимость учета временного фактора вытекает из сущности финансирования, кредитования и инвестирования и выражается в принципе неравноценности денег, относящихся к разным моментам времени (*time-value of money*), или в другой формулировке - принципе изменения ценности денег во времени. Интуитивно понятно, что 1000 рублей, полученные через 5 лет, не равноценны этой же сумме, поступившей сегодня, даже, если не принимать во внимание инфляцию и риск их неполучения. Здесь, вероятно, вполне уместен известный афоризм "Время - Деньги".

Отмеченная неравноценность двух одинаковых по абсолютной величине разновременных сумм связана прежде всего с тем, что имеющиеся сегодня деньги могут быть инвестированы и принести доход в будущем. Полученный доход в свою очередь реинвестируется и т.д.

Очевидным следствием принципа изменения ценности денег во времени является неправомерность суммирования денежных величин, относящихся к разным моментам времени, особенно при принятии решений финансового порядка. Однако такое суммирование вполне допустимо там, где фактор времени не имеет принципиального значения, например, в бухгалтерском учете для получения итогов по периодам и в финансовом контроле.

Не менее важным в финансовом анализе является принцип финансовой эквивалентности, под которым понимается равенство (эквивалентность) финансовых обязательств сторон, участвующих в операции. Согласно этому принципу можно изменять уровень процентных ставок, их вид, сроки исполнения обязательств, распределение платежей во времени и т.д. (разумеется, с согласия контрагента) в рамках одной операции, не нарушая взаимной ответственности.

Одними из основных понятий в финансовом анализе являются процентные деньги, процентная ставка и ряд связанных с ними показателей

Под процентными деньгами или, кратко, процентами, понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой его форме: выдача ссуды, продажа товара в кредит, помещение денег на депозитный счет, учет векселя, покупка сберегательного сертификата или облигации и т.д.

Под процентной ставкой понимается относительная величина дохода за фиксированный отрезок времени.

Временной интервал, к которому приурочена процентная ставка, называют периодом начисления, его не следует путать со сроком начисления. В качестве такого периода принимают год, полугодие, квартал, месяц или даже день. Чаше всего на практике имеют дело с годовыми ставками.

Простейший вид финансовой операции – однократное предоставлении в долг некоторой суммы $S(0)$ с условием, что через время $T$ будет возвращена сумма $S(T)$. Для определения эффективности сделки наиболее часто используются две величины.

1. Относительный рост (интерес, процентная ставка, рентабельность, декурсивная ставка)

$$r_T = \frac{S(T) - S(0)}{S(0)} = \frac{S(t)}{S(0)} - 1.$$

2. Относительная скидка (дисконт, учетная ставка, антисипативная ставка)

$$d_T = \frac{S(T) - S(0)}{S(T)} = 1 - \frac{S(0)}{S(T)}$$

Обе величины характеризуют приращение капитала кредитора, отнесенное либо к начальному вкладу (интерес), либо к конечной сумме (дисконт).

Для учета фактора времени при анализе эффективности финансовых операций используются два метода – наращение и дисконтирование

Процесс увеличения денежной суммы в результате начисления процентов называется наращением. Метод наращения используется для определения будущего значения денежной величины. $S(T) = S(0)(1 + r_T)$

Величина $(1 + r_T)$ называется коэффициентом наращения и отражает реальную прибыль, полученную за период $(T)$, а годовая доходность вычисляется по формуле $r = r_T / T$ и выражает условную величину, т.е. теоретическую норму прибыли за год.

Процесс определения текущего значения денежной величины по её известному значению в будущем называется дисконтированием: $S(0) = S(T)(1 - d_T)$.

Величина $(1 - d_T)$ называется дисконт-фактором:

$$(1 - d_T) = \frac{S(0)}{S(T)} = \frac{1}{1 + r_T}.$$

В финансовом анализе применяются простые, сложные и комбинированные проценты

Обычно расчеты с помощью простых процентов используются на практике за краткосрочные кредиты с периодом $T$ меньше 1 года.

Пусть годовая простая процентная ставка равна $r_n$. Тогда по формуле простых процентов получим интерес (доходность) за период Т лет: $r_T = T \cdot r_n$.

Наращенная сумма с использованием простых процентов составит величину $S(T) = S(0)(1 + Tr_n)$.

При этом надо учитывать принятые условности, иногда неявно оговариваемые в сделке. Если длительность краткосрочного кредита (ссуды) измеряется в днях, то длительность года — также в днях, но используют либо точную длительность (365 или 366 дней), либо (более часто) приближенную (360 дней или 12 месяцев, имеющих условно равную длительность в 30 дней). В ряде стран для удобства вычислений год делится на 12 месяцев по 30 дней в каждом (год = 360 дней). Это так называемая «германская практика». «Французская практика» предполагает продолжительность года, равную 360 дней, но продолжительность месяцев в днях соответствует календарному исчислению. «Английская практика» предполагает продолжительность года, равную 365 дней, а продолжительность месяцев в днях соответствует календарному исчислению.

При расчетах по долгосрочным кредитам, охватывающим несколько полных лет $T$, обычно используют схему сложных процентов (compound interest) $r_T = (1 + r_c)^T - 1$. Наращенная сумма в этом случае составит величину: $S(T) = S(0)(1 + r_c)^T$

Сложные проценты - проценты, полученные на реинвестированные проценты. Основное отличие сложных процентов от простых заключается в том, что база для начисления сложных процентов меняется от одного расчетного периода к другому (добавляется вычисление «процента на процент», происходит капитализация начисленных процентов). На практике срок операции $T$ может быть и нецелым числом.

Если срок $T$ платежа превышает 1 год (период), но насчитывает нецелое число лет (периодов), то финансовые структуры иногда применяют комбинированную схему, т.е. сложные проценты - за целое число лет (периодов), простые - за остаток: $r_T = (1 + r)^{[T]}(1 + r\Delta) - 1$,

где $\Delta = T - [T]$, [ ] - целая часть числа.

Наращенная сумма с использованием комбинированной схемы начисления процентов составит величину: $S(T) = (S0)(1 + r)^{[T]}(1 + r\Delta)$

В финансовых расчетах применяются также схемы, где начисление сложных процентов производится несколько раз в году. При этом оговариваются годовая номинальная ставка $r_{сн}$ и количество начислений $T$ за год. Фактически за базовый период принимается $1/m$ часть года со ставкой сложных процентов $r_{сн}/T$, так что $r_T = (1 + r_{сн}/m)^{Tm} - 1$

Наращенная сумма в этом случае составит величину

$$S(T) = S(0)(1 + r_{сн}/m)^{Tm}$$

Вычисление дисконта или дисконт-фактора за произвольный период $T$ также производится по объявленной годичной ставке $r$ (математическое дисконтирование) или годичному дисконту $d$ (банковское или коммерческое дисконтирование) с использованием различных схем и с учетом либо простых, либо сложных ставок.

Банковский дисконт вычисляется по соотношению: $d_T = Td_n$, где $d_n$-годичный простой дисконт.

Данная схема часто применяется в банковских расчетах при покупке (учете) банковских краткосрочных обязательств (векселей, облигаций).

Дисконтированная (начальная, современная) сумма в этом случае составит величину $S(0) = S(T)(1 - Td_n)$.

При использовании сложной ставки банковского дисконтирования, начальная сумма рассчитывается по формуле: $S(0) = S(T)(1 - d_c)^T$, относительная скидка

$$d_T = \frac{S(T) - S(0)}{S(T)} = 1 - \frac{S(0)}{S(T)} = 1 - \frac{(1 - d_c)^T \cdot S(T)}{S(T)} = 1 - (1 - d_c)^T,$$

$d_c$ – сложная учетная ставка.

При использовании математического учета решается задача, обратная наращению. При простой процентной ставке

$$S(0) = \frac{S(T)}{(1 + Tr_n)}$$

при сложной процентной ставке

$$S(0) = \frac{S(T)}{(1 + r_c)^T}.$$

При использовании схемы дисконтирования несколько раз в течении года, оговаривается номинальный дисконт $d_{сн}$ и число пересчетов в году тогда $d_T = 1 - (1 - \frac{d_{сн}}{m})^{Tm}$. Дисконтированная сумма составит:

$$S(0) = \frac{S(T)}{(1 + Tr_n)}$$

В практических финансово-кредитных операциях непрерывное наращение, т.е. наращение за бесконечно малые отрезки времени, применяется крайне редко. Существенно большее значение непрерывное наращение имеет в анализе сложных финансовых проблем, например при обосновании, и выборе инвестиционных решений, в финансовом проектировании. С помощью непрерывных процентов удается учесть сложные закономерности процесса наращения, например, использовать изменяющиеся по определенному закону процентные ставки.

При непрерывном наращении процентов применяют особый вид процентной ставки - силу роста. Сила роста характеризует относительный прирост наращенной суммы за бесконечно малый промежуток времени. Она может быть постоянной или изменяться во времени.

Постоянная сила роста**.** Как было показано выше, при дискретном начислении процентов $m$ раз в году по номинальной ставке $r_{сн}$ наращенная сумма находится как $S(T) = S(0)(1 + r_{сн}/m)^{Tm}$ Чем больше *m,* тем меньше промежуток между моментами начисления процентов. В пределе при $m \to \infty$ $S(T) = S(0)\lim\limits_{m\to\infty}(1 + r_{сн}/m)^{Tm} = S(0)e^{r_{сн}T}$. Для того чтобы отличить непрерывную ставку от дискретной, обозначим силу роста как $\delta$. Теперь можно записать $S(T) = S(0)e^{\delta \cdot T}$. Итак, при непрерывном наращении процентов наращенная сумма равна конечной величине, зависящей от первоначальной суммы, срока наращения и силы роста. Последняя представляет собой номинальную ставку сложных процентов при $m \to \infty$ Дисконтированная сумма составит величину: $S(0) = S(T)e^{-\delta \cdot T}$

Переменная сила роста. Пусть сила роста изменяется во времени, следуя некоторому закону, представленному в виде непрерывной функции времени: $\delta(t) = f(t)$. Тогда наращенная сумма и современная величина определяются как:

$$S(T) = S(0)\exp(\int_0^T \delta(t)dt);\ S(0) = S(T)\exp(-\int_0^T \delta(t)dt)$$

Изменяющиеся во времени процентные ставки

1. Для простых процентов наращенная к концу срока сумма определяется следующим образом:

$$S(T) = S(0)(1 + T_1 r_1 + T_2 r_2 + ... + T_N r_N) = S(0)(1 + \sum_{i=1}^{N} T_i r_i);$$

где $T_i$ - продолжительность $i$-го периода, $r_i$- ставка простых процентов в периоде $i(i = \overline{1, N})$.

Если применяется последовательное повторение наращения, т.е. реинвестирование, полученных на каждом этапе средств по простым процентам, то наращенная для всего срока сумма составит:

$$S(T) = S(0)(1 + T_1 r_1)(1 + T_2 r_2)...(1 + T_N r_N),$$

где $r_i$ – ставка реинвестирования в периоде $i(i = \overline{1, N})$.

Если периоды начисления и ставки не изменяются во времени, то в этом случае получим сумму:

$$S(T) = S(0)(1 + Tr_n)^N \text{ (}N\text{ – количество реинвестиций).}$$

2. Для сложных процентов наращенная к концу срока сумма определится следующим образом:

$$S(T) = S(0)(1 + r_1)^{T_1}(1 + r_2)^{T_2}...(1 + r_N)^{T_N}$$

где $T_i$ - продолжительность $i$-го периода, $r_i$ - ставка сложных процентов в периоде $i(i = \overline{1, N})$.

10.2. Эквивалентные процентные ставки, эффективная процентная ставка.

Мы рассмотрели все возможные способы начисления процентов. Однако, по какой бы ставке не начислялись проценты, следует соблюдать принцип эквивалентности, в соответствии с которым финансовый результат должен быть одинаков при начислении по любой ставке. Такие ставки называются эквивалентными и находятся из равенства взятых попарно множителей наращения (или дисконтирования) из общих соотношений:

$$S(T) = S(0)(1 + r_T)\ ;\ S(0) = S(T)(1 - Td_n)$$

Для определения соотношения эквивалентности между простой и сложной ставками наращения. приравнивают друг к другу соответствующие множители наращения:

$$(1 + Tr_n) = (1 + r_c)^T,$$

где $r_n$ ,$r_c$ - ставки простых и сложных процентов.

Приведенное равенство предполагает, что начальные и наращенные суммы при применении этих двух видов ставок идентичны.

Из приведенного уравнения получаем отношения эквивалентности ставок

$$r_n = \frac{(1 + r_c)^T - 1}{T};\ r_c = \sqrt[T]{1 + Tr_n} - 1$$

Если временные базы ставки наращения и учетной ставки одинаковы ($T_{год}$ = 360 или 365 дней), то эквивалентность простых ставок - учетной и наращения - рассчитывают по формуле:

$$r_n = \frac{d_n}{1 - Td_n};\ d_n = \frac{r_n}{1 + Tr_n},$$

где $d_n$ - простая учетная ставка.

Пусть срок ссуды измеряется в днях. Тогда $T = \frac{t_{дн}}{T_{год}}$. В этом случае соотношение, если временные базы одинаковы и равны 360 дней уравнения эквивалентности будут иметь вид:

$$r_n = \frac{360d_n}{360 - t_{дн}d_n};\ d_n = \frac{360r_n}{360 + t_{дн}r_n}.$$

Если при начислении процентов принятая база $T_{год}$ =365, а для учетной ставки $T_{год}$ =360 дней, то $r_n = \frac{365d_n}{360 - t_{дн}d_n};\ d_n = \frac{360r_n}{365 + t_{дн}r_n}$

Эквивалентность простых, сложных и номинальных ставок характеризуются следующими соотношениями:

$$r_n = \frac{\left(1 + \frac{r_{сн}}{m}\right)^{mT} - 1}{T};\ r_{сн} = m\left(\sqrt[mT]{1 + Tr_n} - 1\right);$$

$$d_n = \frac{1 - (1 + r_c)^{-T}}{T};\ r_c = \sqrt[-1/T]{1 - Td_n} - 1;$$

$$d_n = \frac{1 - \left(1 + \frac{r_{сн}}{m}\right)^{-mT}}{T};\ r_{сн} = m\left(\sqrt[-1/mT]{1 - Td_n} - 1\right);$$

$$r_c = \left(1+\frac{r_{сн}}{m}\right)^m - 1;\; r_{сн} = m\left(\sqrt[m]{1+r_c} - 1\right);$$

$$r_c = \frac{d_c}{1-d_c};\; d_c = \frac{r_c}{1+r_c};\; r_c - d_c = r_c \cdot d_c .$$

Эквивалентность сложных дискретных и непрерывных ставок рассчитываются по формулам:

$$r_c = e^{\delta} - 1;\; \delta = \ln(1+r_c);$$

$$r_{сн} = m(e^{r_н/m} - 1);\; \delta = m \times \ln(1+\frac{r_c}{m});$$

$$\delta = -\ln(1-d_c);\; r_c = 1-e^{-\delta}$$

Для сравнения различных сделок по их эффективности используется один измеритель - эффективная ставка (действительная ставка).

Эффективной $r_э$ называется годичная ставка сложных процентов, дающая то же соотношение между выданной суммой $S(0)$ и суммой $S(T)$, которая получена при любой схеме выплат. Эта ставка измеряет тот реальный относительный доход, который получают в целом за год.

Общая формула эффективной ставки следует из определения

$$(1+r_э)^T = \frac{S(T)}{S(0)}.\ \text{Отсюда}\ \ r_э = \left(\frac{S(T)}{S(0)}\right)^{\frac{1}{T}} - 1$$

При оценке эффективности сделок, определенных с помощью процентных или учетных ставок, значения суммы начального или конечного платежа несущественны. Эффективная ставка непосредственно определяется заданием интереса или дисконта и схемой начислений.

Для расчета эффективной ставки основных схем начислений применяются следующие формулы:

– при начислении по простым процентам: $r_э = (1+Tr_n)^{\frac{1}{T}} - 1$

– при начислении по сложным процентам с капитализацией $m$ раз в год: $r_э = (1+\frac{r_{сн}}{m})^m - 1$

– при учете по банковскому дисконту: $r_э = (1-Td_n)^{-\frac{1}{T}} - 1$

– при учете по математическому дисконту с дисконтированием $m$ раз в год: $r_э = (1+\frac{d_{сн}}{m})^{-m} - 1$

Расчет эффективной ставки $r_э$ - один из основных инструментов финансового анализа. Знание этой величины позволяет сравнивать между собой сделки, построенные по различным схемам: чем выше эффективная ставка, тем (при прочих равных условиях) выгоднее сделка для кредитора.

В частности, при одинаковой номинальной ставке процента эффективная ставка при начислениях по схеме простых процентов выше, чем при начислениях по схеме сложных процентов, если период начислений меньше года, и ниже, если период начисления больше года. Эффективная ставка при комбинированной схеме начислений всегда превосходит номинальную, если число лет не является целым.

## Тема 11. Потоки платежей и финансовая эквивалентность обязательств

### 11.1. Виды рент. Основные формулы наращения и приведения потоков платежей.

Современные финансово-банковские операции часто предполагают не отдельные или разовые платежи, а некоторую их последовательность во времени, например, погашение задолженности в рассрочку, периодическое поступление доходов от инвестиций, выплаты пенсии и т. д. Такого рода последовательность, или ряд платежей, называют потоком платежей. Отдельный элемент такого ряда платежей назовем членом потока.

Потоки платежей могут быть регулярными и нерегулярными. Члены потоков могут быть как положительными (поступления), так и отрицательными величинами (выплаты).

Поток платежей, все члены которого положительные величины, а временные интервалы между платежами одинаковы, называют финансовой рентой, или просто рентой. Например, рентой является последовательность получения процентов по облигации, платежи по потребительскому кредиту, выплаты в рассрочку страховых премий и т.д. Иногда подобного рода поток платежей называют аннуитетом.

Рента описывается следующими параметрами:

– член ренты - размер отдельного платежа;
– период ренты - временной интервал между двумя последовательными платежами;
– срок ренты - время от начала первого периода ренты до конца последнего;
– процентная ставка.

В практике применяют разные ренты. Их принято классифицировать по различным признакам.

По количеству выплат ренты делятся на годовые (выплата раз в году) и $k$-срочные ($k$ - количество выплат в году). Их называют дискретными рентами.

По числу начислений процентов различают: ренты с ежегодным начислением, с начислением $m$ раз в году, с непрерывным начислением.

По величине своих членов ренты делятся на постоянные (с одинаковыми размерами члена ренты) и переменные. Постоянные ренты - наиболее распространенный вид ренты.

По вероятности выплат ренты делятся на верные и условные. Верные ренты подлежат безусловной уплате, например, при погашении кредита.

Выплата условной ренты ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события, число ее членов заранее неизвестно.

Очень важным является различие по моменту выплат платежей в пределах периода ренты. Если платежи осуществляются в конце этих периодов, то соответствующие ренты называют обыкновенными, или постнумерандо, если же платежи производятся в начале периодов, то их называют пренумерандо. Для ренты пренумерандо наращенная сумма $S_{пре}(T)$ увеличивается в коэффициент наращения $(1+r)$.

В большинстве случаев анализ потока платежей предполагает расчет одной из двух обобщающих характеристик: наращенной суммы $S(T)$ или современной стоимости потока $S(0)$. Наращенная сумма - сумма всех членов потока платежей с начисленными на них к концу срока процентами. Под современной стоимостью потока платежей понимают сумму всех его членов, дисконтированных на начало срока ренты или некоторый упреждающий момент времени.

Основные формулы наращения и приведения потоков платежей представлены в таблице 1 и 2.

Таблица 1.

Основные формулы наращения потоков платежей

| Виды рент | Наращение постнумерандо $S(T)$ | Наращение пренумерандо $S_{пре}(T)$ |
|---|---|---|
| 1. Годовая с начислением % по сложной годовой ставке | $S(T)=S_{ед}\cdot\frac{(1+r_c)^T-1}{r_c}$ | $S_{пре}(T)=S(T)\cdot(1+r_c)$ |
| 2. При начислении % по номинальной ставке $m$ раз в году | $S(T)=S_{ед}\,\frac{(1+{r_{сн}}/{m})^{mT}-1}{(1+{r_{сн}}/{m})^{m}-1}$ | $S_{пре}(T)=S(T)\cdot(1+\frac{r_{сн}}{m})^m$ |
| 3. Рента выплачивается $k$ раз в году суммами при начислении % по сложной годовой ставке | $S(T)=S_{ед}\cdot\frac{(1+r_c)^T-1}{(1+r_c)^{1/k}-1}$ | $S_{пре}(T)=S(T)\cdot(1+r_c)^{1/k}$ |
| 4. Рента выплачивается $k$ раз в году при начислении % по номинальной ставке $m$ раз в год | $S(T)=S_{ед}\,\frac{(1+{r_{сн}}/{m})^{mT}-1}{[(1+{r_{сн}}/{m})^{m/k}-1]}$ | $S_{пре}(T)=S(T)\cdot(1+\frac{r_{сн}}{m})^{m/k}$ |
| 5. Рента годовая с непрерывным начислением % | $S(T)=S_{ед}\cdot\frac{e^{\delta T}-1}{e^{\delta}-1}$ | $S_{пре}=S(T)\cdot e^{\delta}$ |
| 6. Рента $k$–срочная с непрерывным начислением % | $S(T)=S_{ед}\cdot\frac{e^{\delta T}-1}{e^{\delta/k}-1}$ | $S_{пре}=S(T)\cdot e^{\delta/k}$ |

Таблица 2.
Основные формулы приведения потоков платежей

| Виды рент | Приведение постнумерандо $S(0)$ | Приведение пренумерандо $S_{пре}$ |
|---|---|---|
| 1. Годовая с начислением % по сложной годовой ставке | $S(0)=S_{ед}\cdot\frac{1-(1+r_c)^{-T}}{r_c}$ | $S_{пре}=S(0)\cdot(1+r_c)$ |
| **2.** Годовая с начислением % $m$ раз в году $(k=1, m\neq 1)$ | $S(0)=S_{ед}\frac{1-(1+{r_{сн}}/{m})^{-mT}}{(1+{r}/{m})^{m}-1}$ | $S_{пре}=S(0)\cdot(1+\frac{r_{сн}}{m})^{m}$ |
| 3. Рента $k$ –срочная с начислением % один раз в году $(k\neq 1, m=1)$. | $S(0)=S_{ед}\cdot\frac{1-(1+r_c)^{-T}}{(1+r_c)^{1/k}-1}$ | $S_{пре}=S(0)\cdot(1+r_c)^{1/k}$ |
| 4. Рента $k$ -срочная с начислением % m раз в году $(k\neq 1, m\neq 1, n\neq m)$. | $S(0)=S_{ед}\frac{1-(1+{r_{сн}}/{m})^{-mT}}{[(1+{r_{сн}}/{m})^{m/k}-1]}$ | $S_{пре}=S(0)\cdot(1+\frac{r_{сн}}{m})^{m/k}$ |
| 5. Рента годовая с непрерывным начислением $\%\ (k=1, m\to\infty)$ | $S(0)=S_{ед}\cdot\frac{1-e^{-\delta T}}{e^{\delta}-1}$ | $S_{пре}=S(0)\cdot e^{\delta}$ |
| 6. Рента k –срочная с непрерывным начислением $\%\ (k\neq 1, m\to\infty)$ | $S(0)=S_{ед}\cdot\frac{1-e^{-\delta T}}{(e^{\delta/k}-1)}$ | $S_{пре}=S(0)\cdot e^{\delta/k}$ |

## 11.2. Конверсия рент.

Иногда в процессе хозяйственной деятельности возникает необходимость изменения условий ранее заключенных соглашений: изменить сроки платежей; произвести объединение нескольких платежей в один (консолидировать платежи) с установлением единого срока погашения и т.п. Предлагаемые изменения должны быть безубыточными для обеих сторон.

Основным принципом изменения условий сделки (контракта) является принцип финансовой эквивалентности: сумма заменяемых платежей, приведенных к одному моменту времени, должна быть равна сумме платежей по новому обязательству, приведенной к той же дате.

При консолидации $N$ платежей в один при условии, что срок нового консолидированного платежа больше ранее установленных сроков $(t_{кон}>t_1,t_2,...,t_N)$, уравнение эквивалентности имеет вид:

$$S_{кон}=\sum_{i=1}^{N}S_i(1+T_ir_i)\text{, где}$$

$S_{кон}$ - наращенная сумма консолидированного платежа;

$S_i$ - платежи, подлежащие консолидации, со сроками уплаты $t_1, t_2, ..., t_N$;

$S_i$ - временные интервалы между сроком $t_{кон}$ и $t_i$, т.е. $T_i = t_{кон} - t_i$;

$r_i$ - процентные ставки платежей.

Две суммы денег $S_1$, и $S_2$ выплачиваемые в разные моменты времени, считаются эквивалентными, если их современные (или наращенные) величины, рассчитанные по одной и той же процентной ставке и на один момент времени, одинаковы. Замена $S_1$ на $S_2$ в этих условиях формально не изменяет отношения сторон.

При консолидации $N$ платежей в один со сроком $t_1 < t_{кон} < t_N$ сумму консолидированного платежа находим как сумму наращенных и дисконтированных платежей: $S_{кон} = \sum_i S_i(1+T_i r_n) + \sum_j S_j(1+T_j r_n)^{-1}$, где $T_i$-размеры объединенных платежей со сроком $T_i < t_{кон}; S_j - T_j > t_{кон}; T_i = t_{кон} - t_i; T_j = t_j - t_{кон}$. При объединении платежей можно применять и учётные ставки. В этом случае при $t_{кон} > t_i$, принято рассчитывать сумму наращённых по простой учётной ставке платежей:

$$S_{кон} = \sum_{i=1}^{N} S_i(1-T_i d_n)^{-1}.$$

При $t_1 < t_{кон} < t_N$ $S_{кон} = \sum_i S_i(1-T_i d_n)^{-1} + \sum_j S_j(1-T_j d_n)$.

Консолидация платежей на основе сложных ставок осуществляется по формуле: $S_{кон} = \sum_i S_i(1+r_c)^{T_i} + \sum_j S_j(1+r_c)^{-T_j}$

Если при объединении платежей задана величина консолидирования платежа $S_{кон}$, то часто возникает проблема определения его срока $t_{кон}$:

а) при применении простой ставки по формуле

$$t_{кон} = \frac{1}{r_n}\left[\frac{S_{кон}}{\sum_{i=1}^{N} S_i(1+t_i r_n)^{-1}} - 1\right], \text{ при } S_{кон} > \sum_{i=1}^{N} S_i(1+t_i r_n)^{-1}.$$

б) при применении сложных процентных ставок по формуле

$$t_{кон} = \frac{\ln\left[\frac{S_{кон}}{\sum_{i=1}^{N} S_i(1+r_c)^{-t_i}}\right]}{\ln(1+r_c)}, \text{ при } S_{кон} > \sum_{i=1}^{N} S_i(1+r_c)^{-t_i}.$$

В общем случае при изменении условий выплат, предусмотренных в контрактах, разрабатывается соответствующее уравнение эквивалентности.

Если приведение платежей осуществляется на некоторую начальную дату, то получим следующие уравнения эквивалентности:

$\sum_i S_i(1+t_i r_n)^{-1} = \sum_j S_j(1+t_j r_n)^{-1}$ - при использовании простых процентных ставок;

$\sum_i S_i(1+r_c)^{-t_i} = \sum_j S_j(1+r_c)^{-t_j}$ - при использовании сложных процентных ставок.

Здесь $S_i$ и $t_i$ параметры заменяемых платежей; $S_j$ и $t_j$ параметры заменяющих платежей.

## Тема 12. Методы оценки инвестиционных процессов

### 12.1. Характеристики эффективности производственных инвестиций

Финансовый анализ производственных инвестиций в основном заключается в оценивании конечных финансовых результатов инвестиций т.е. их доходности для инвестора. Отрицательный вывод дает основание отказаться от дальнейшего, более основательного и углубленного, изучения проекта. Без расчета такого рода измерителей нельзя осуществить и сравнение альтернативных инвестиционных проектов.

Существуют различные методы измерения эффективности инвестиций. Их можно разбить на две большие группы: дисконтные и бухгалтерские.

При дисконтной методике используют четыре показателя:

- чистый приведенный доход,
- внутреннюю норму доходности,
- дисконтный срок окупаемости,
- индекс доходности.

Бухгалтерские методики применяются для предварительной оценки инвестиционного проекта. Они предполагают расчет следующих показателей:

- срок окупаемости,
- отдача капитальных вложений,
- удельные капитальные затраты.

Под отдачей капиталовложений понимают отношение суммы доходов за весь ожидаемый период отдачи к размеру инвестиций.

Удельные капитальные затраты характеризуют инвестиционные издержки в расчете на единицу выпуска продукции. Неоднозначность результатов, получаемых при оценивании эффективности проектов, является причиной того, что многие фирмы для повышения надежности при отборе вариантов инвестирования ориентируются на два и более измерителя.

Для окончательного решения о выборе проекта, разумеется, привлекаются и дополнительные критерии, в том числе и неформальные, например, связанные с экологией и безопасностью работы персонала.

Основная задача при разработке модели, с помощью которой намереваются проанализировать долгосрочный инвестиционный проект, в том числе измерить его финансовую эффективность, заключается в формировании ожидаемого потока платежей. Первым шагом в этом направлении является разработка структуры потока во времени — разбивка его на этапы, различающиеся своим содержанием и закономерностями в изменении доходов и затрат. При этом должны быть приняты во внимание как ожидаемые внешние условия (например, динамика цен на продукцию), так и производственные параметры (объемы производства, уровень производственных затрат и т.д.).

Часто отдельные отрезки потока платежей могут быть представлены в виде постоянных или переменных дискретных, или, наконец, непрерывных рент.

12.2. Дисконтные методы оценки инвестиционных процессов

Под чистым приведенным доходом понимается разность дисконтированных показателей чистого дохода (положительные величины) и инвестиционных затрат (отрицательные величины). Чистый приведенный доход, как видим, представляет собой обобщенный конечный результат инвестиционной деятельности в абсолютном измерении. $NPV$ вычисляется с учетом знака $S_i$ по следующей формуле:

$$NPV = \sum_{i=1}^{N} S_i (1 - d_{t_i}) = \sum_{i=1}^{N} S_i \frac{1}{1 + r_{t_i}}$$

Так как членами потока платежей являются как положительные, так и отрицательные величины, положительной или отрицательной может быть и величина $NPV$. Последнее означает, что доходы не окупают затраты при принятой норме доходности и заданном распределении капитальных вложений и поступлений во времени.

Особенностью чистого приведенного дохода, является во-первых, то что - это абсолютный показатель и, следовательно, зависит от масштабов капитальных вложений. Это обстоятельство необходимо учитывать при сравнении нескольких инвестиционных проектов. Второе - существенная зависимость чистого приведенного дохода от временных параметров проекта (срок начала отдачи от инвестиций и продолжительность периода отдачи).

Зависимость $NPV$ от ставки $r$ для случая, когда вложения осуществляются в начале инвестиционного процесса, а отдачи примерно равномерные, иллюстрируется на рис. 12.1. Как показано на рисунке, с ростом ставки приведения размер чистого приведенного дохода сокращается когда ставка приведения достигает некоторой величины $IRR$, финансовый эффект от инвестиций оказывается нулевым. Ставка $IRR$, при которой чистый приведенный доход равен нулю называется внутренней нормой доходности т.е. $IRR = r$, при $NPV = f(r) = 0$. Это относительный показатель эффективности реализации инвестиционного проекта.

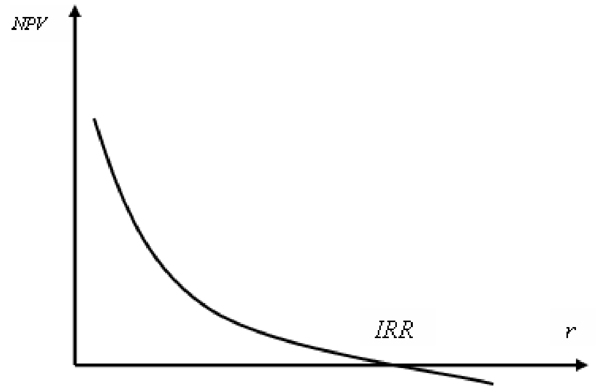


Рис 12.1. Зависимость $NPV$ от ставки $r$, типовой случай

Если инвестиционный проект предусматривает выплаты $S_i$ ( с учетом знака) в моменты $t_i$ $i = \overline{1, N}$, то $IRR$ вычисляется как корень уравнения:

$$\sum_{i=1}^{N} S_i \frac{1}{(1+r_э)^{t_i}} = 0, \text{ где } r_3 = IRR.$$

При этом начало операции принимается за начало отсчета времени. Чем выше $IRR$ – тем привлекательней инвестиционный проект.

Например, если проект полностью финансируется за счет ссуды коммерческого банка, то $IRR$ показывает верхнюю границу допустимого уровня банковской процентной ставки, превышение которой делает проект убыточным.

Чистый приведенный доход при условии, что дисконтирование членов потока производится по ставке $r_3$, по определению равен нулю (рис. 12.1). На этом рисунке кривая пересекает ось $r$ только один раз в точке $IRR$. Это типовой случай. Однако при специфическом распределении членов потока во времени последовательные члены потока платежей могут изменять свой знак несколько раз (например, если ожидаются в будущем крупные затраты на модернизацию процесса производства). В этих случаях кривая пересекает эту ось несколько раз (рис.12.2). Соответственно, имеется несколько значений искомой ставки (несколько корней многочлена), удовлетворяющих условию $NPV = f(r) = 0$. Заметим, что условие смены знаков является необходимым, но недостаточным для получения нескольких корней.

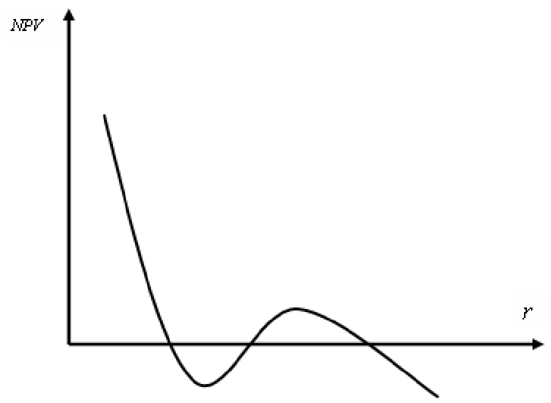


Рис 12.2. Зависимость $NPV$ от ставки $r$, когда кривая пересекает ось $r$ несколько раз.

На практике могут встречаться случаи, когда члены потока платежей несколько раз меняют знак на протяжении срока инвестиционного проекта. В этих случаях чистый приведенный доход также может неоднократно изменять свой знак (рис. 12.2). Для данного потока получим несколько значений внутренней нормы доходности. Каждое из значений формально удовлетворяет уравнению $NPV = f(r) = 0$. Однако множественность ответов лишена экономического смысла.

Широко применяют на западе модифицированную внутреннюю норму доходности ($M$), которая рассчитывается по формуле

$$M = \sqrt[n]{\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{S_i}{(1+r_{n.д})^{T_i}}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{S_j}{1+r_{n.p})^{T_j}}}} - 1,$$

где числитель - современная стоимость потока доходов от инвестиций: ($S_i$ - инвестиционные доходы в момент времени $T_i, i = 1,2,...,n;$ $r_{nд}$ - ставка приведения инвестиционных доходов); в знаменателе современная стоимость потока инвестиционных расходов ($S_j$ инвестиционные доходы в момент времени $T_j$, $j = 1,2,...,$ $n;$ $r_{n.p}$ - ставка приведения инвестиционных расходов, $n$ общий срок инвестиционного проекта).

Срок окупаемости, как уже отмечено выше, определяется в двух вариантах — на основе дисконтированных членов потока платежей и без дисконтирования. Обозначим первый как $n_{ок}$ , второй как m. Величина $n_{ок}$ характеризует число лет, которое необходимо для того, чтобы сумма дисконтированных на момент окончания инвестиций чистых доходов была равна размеру инвестиций (барьерная точка для срока). Иначе говоря, это расчетное время, необходимое для полной компенсации инвестиций поступающими доходами с дисконтированием обоих потоков по ставке приведения. Второй показатель в общем смысле аналогичен первому, но время получения доходов не учитывается и доходы не дисконтируются.

В предельно простом случае срок окупаемости m определяется как отношение суммы инвестиций к средней ожидаемой величине поступаемых доходов:

$$m = \frac{K}{R}, \text{ где}$$

$K$ – капитальные затраты, $R$ – средний годовой доход от инвестиций

Такой расчет, очевидно, имеет смысл при относительно незначительных колебаниях годовых доходов относительно средней. В финансовом отношении более обоснованным является дисконтный срок окупаемости $n_{ок}$. Пусть размеры капитальных вложений к концу срока инвестирования составляют величину $K$. Доходы поступают в виде нерегулярного потока платежей $S_i$. Необходимо найти такой срок, при котором будет выполнено равенство.

$$\sum_{i=1}^{n_{ок}} S_i \frac{1}{(1+r)^{T_i}} = K .$$

Остановимся на ситуации, когда капиталовложения заданы одной суммой ($K$), а поток доходов постоянен ($S_{ед}$) и дискретен (постоянная ограниченная рента). Тогда из условия полной окупаемости за срок $n_{ок}$ при заданной процентной ставке $r$ и ежегодных поступлений постнумерандо следует:

$$n_{ок} = \frac{-\ln\left(1 - \frac{K}{S_{ед}} r\right)}{\ln(1+r)}$$

Последний из перечисленных выше измерителей эффективности капиталовложений, индекс доходности ($PI$) или отношение "доход-затраты", равен отношению современной стоимости поступлений к стоимости инвестиций. Как видим, он близок по своему содержанию к показателю рентабельности. Рентабельность инвестиций также может быть измерена двумя способами: бухгалтерским и с учетом фактора времени (с дисконтированием членов потока платежей). В обоих случаях доход сопоставляется с размером инвестиций. На основе бухгалтерского метода получим два варианта индекса доходности:

$$PI = \frac{\sum_i S_i}{K} \text{ или } PI = \frac{\sum_i S_i - K}{K} = \frac{\sum_i S_i}{K} - 1.$$

В последней записи этот индекс совпадает с принятым в нашей стране показателем рентабельности.

При дисконтировании членов потока платежей индекс доходности определятся по формулам:

а) $PI = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{S_i}{(1+r_{п.д})^{T_i}}}{K}$ - если капиталовложения приведены к одной сумме $K$,

б) $PI = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{S_i}{(1+r_{п.д})^{T_i}}}{\sum_{j=1}^{n} \dfrac{S_j}{1+r_{п.р})^{T_j}}}$, если капитальные затраты распределены во времени.

## Тема 13. Портфель ценных бумаг.

### 13.1. Риск и доходность портфеля ценных бумаг

Инвестирование на рынке ценных бумаг всегда сопровождается риском. Риск – это ситуативная характеристика деятельности любого субъекта рыночных отношений. Риск отражает неопределенность исхода каждой конкретной финансовой операции и возможные неблагоприятные последствия в случае неуспеха.

В самом общем смысле, риск есть производные двух факторов: незнание и случайность. Для уменьшения незнания широко применяются информационные системы и технологии обработки и принятия решений. Остается случайность. Результат финансовых операций почти всегда случаен. Проблемы случайности частично решаются используя теорию вероятностей и математическую статистику.

Из характеристик ценных бумаг наиболее значимы две: эффективность (или средняя ожидаемая эффективность) $R$ и рискованность $\sigma$. Эффективность есть некоторый обобщенный показатель дохода, прибыли или доходности. Обычно эффективность считается случайной величиной $R$, среднее ожидаемое значение есть математическое ожидание $m_R = M[R]$. При исследовании финансового рынка дисперсию $D$ обычно называют вариацией $V$, и рискованность $\sigma$ обычно отождествляют с мерой рассеянности значений эффективности вокруг ее некоторого среднего значения. Часто рискованность отождествляют со средним квадратическим отклонением.

Итак, $\mathrm{V} = \mathrm{D(R)} = M(R - m_R)^2$, $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{M(R - m_R)^2}$.

Если имеется выборка $w = (r_1, r_2, ..., r_n)$ значений эффективности ценной бумаги, то $\overline{R} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i$ есть состоятельная и несмещенная оценка средней ожидаемой эффективности. Величины $\widetilde{V} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(r_i - \overline{R})^2$ и $\widetilde{\sigma} = \sqrt{\widetilde{V}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(r_i - \overline{R})^2}$ - состоятельные и несмещенные оценки дисперсии и рискованности.

Распределение эффективности как случайной величины почти никогда не бывает известным. На практике, как правило, имеется лишь ряд ее значений, по которому можно вычислять оценки нужных параметров ее распределения, с которыми и приходится иметь дело

Отметим еще раз единственное - фундаментальное правило, связывающее эффективность и рискованность операций и инструментов финансового рынка: между эффективностью и рискованностью существует прямая регрессионная зависимость - более эффективные (более доходные) операции, как правило, и более рискованные.

Любая система мер, направленная на снижение риска, называется хеджированием. Далее будет рассмотрена математическая модель, позволяющая выполнить хеджирование путем оптимизации портфеля ценных бумаг.

Покупая акции одной компании, инвестор ставит свое благополучие в зависимость от курсовых колебаний акций этой компании. Если же он вложит свой капитал в акции нескольких компаний, то эффективность сформированного таким образом портфеля ценных бумаг будет зависеть от усредненного курса нескольких компаний, а степень неопределенности будет задаваться усредненной дисперсией. Если такая дисперсия меньше отдельных дисперсий, то, выполняя эту операцию, мы уменьшаем неопределенность.

Рассмотрим теперь общую задачу распределения капитала, который участник рынка хочет потратить на покупку ценных бумаг, по различным видам ценных бумаг.

Пусть $x_i$ - доля капитала, потраченная на закупку ценных бумаг $i$-го вида, а $R_i$ - случайная эффективность (например, доход за некоторый период времени) ценных бумаг $i$-го вида, стоящих одну денежную единицу.

Пусть далее $m_i$, $\sigma_i$ - ожидаемая эффективность и среднее квадратическое отклонение этой эффективности, т.е. $m_i$ - математическое ожидание эффективности $R_i$ и $\sigma_i = \sqrt{V_{ii}}$ , где $V_{ii}$ - вариация, или дисперсия этой эффективности. Через $V_{ij}$ обозначим ковариацию ценных бумаг $i$-го и $j$-го видов. Рискованность ценной бумаги $i$-го вида отождествим со средним квадратическим отклонением $\sigma_i = \sqrt{V_{ii}}$. Набор ценных бумаг у участника рынка называется его портфелем. Эффективность портфеля (в простейшем случае это доход, который приносят ценные бумаги за какой-нибудь промежуток времени) в общем случае есть случайная величина, которую обозначим через $R_n$. Тогда ожидаемое значение этой эффективности $m_n = M[R_n] = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i$ , дисперсия портфеля есть

$$D[R_n] = V[R_n] = \sigma_n^2 = M[(R_n - m_n)^2] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{cov}(x_i x_j) x_i x_j =$$

$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} x_i x_j.$ , где $\rho_{ij}$- коэффициент корреляции величин $R_i$ и $R_j$ $i, j = 1,2,...n.$

Так как $\sigma_i = \sqrt{V_{ii}}$ - мера рискованности $i$-ой ценной бумаги, то величину $\sigma_n = \sqrt{D[R_n]}$ можно назвать риском портфеля. Таким образом, получены формулы для выражения эффективности и риска портфеля через эффективности составляющих его ценных бумаг и их ковариации.

Изучим влияние корреляции разных ценных бумаг. Пусть вначале ценные бумаги различных видов ведут себя независимо, более точно – они некоррелированы, т.е. $V_{ij} = 0$, ($\rho_{ij} = 0$) если $i \neq j$. Тогда

$$V[R_n] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ii} x_i , \ \sigma_n = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ii} x_i} .$$

Предположим далее, что деньги вложены равными долями, т.е. $x_i = \frac{1}{n}$, $i = \overline{1,n}$; тогда $m_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i$ - средняя ожидаемая эффективность портфеля, риск портфеля равен

$$(\sigma_n = \sqrt{V_n} = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}\ V_{ii} = \sigma_i^2).$$

Пусть $\sigma_{\max} = \max \sigma_i$. Тогда

$$\sigma_n \le \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_{\max}^2} = \frac{1}{n}\sqrt{n\sigma_{\max}^2} = \frac{\sigma_{\max}}{\sqrt{n}},$$

т.е. при некоррелированных ценных бумагах, при росте числа их видов в портфеле, риск портфеля ограничен и стремится к нулю при $n \to \infty$.

Этот вывод называют эффектом диверсификации портфеля.

Корреляция не влияет на эффективность портфеля, так как $m_n = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i$, но сказывается на его вариации или риске, так как $V[R_n] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ii} x_i$.

Рассмотрим коэффициенты корреляции $\rho_{ij} = \dfrac{V_{ij}}{(\sigma_i \sigma_j)}$, тогда $V_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\sigma_i x_i)(\sigma_j x_j)\rho_{ij}$.

Для понимания влияния корреляции рассмотрим два крайних случая:

1. Случай полной прямой корреляции, т.е. когда все $\rho_{ij} = 1$ - это значит, что при изменении $i$-го фактора $j$-ый также изменяется, причем прямо пропорционально. Тогда

$$V_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\sigma_i x_i)(\sigma_j x_j)\rho_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(\sigma_i x_i)^2.$$

Если при этом вложить деньги равными долями, т.е.

$x_i = \dfrac{1}{n}$, то $V_n = \dfrac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma\right)^2$ и риск портфеля $\sigma_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i$.

Если $\sigma_{\min} \le \sigma_i \le \sigma_{\max}$, то $\sigma_{\min} \le \sigma_n \le \sigma_{\max}$.

Следовательно, при полной прямой корреляции диверсификация портфеля не дает никакого эффекта - риск портфеля равен среднему арифметическому рисков составляющих его ценных бумаг и к нулю не стремится при росте числа видов ценных бумаг.

Отметим, что положительная корреляция между эффективностями двух ценных бумаг имеет место, когда курс обеих определяется одним и тем же внешним фактором, причем изменение этого фактора действует на обе бумаги в одну и ту же сторону.

2. Случай полной обратной корреляции, т.е. когда все $\rho_{ij} = -1$, если $i \ne j$. Для понимания существа дела рассмотрим портфель, состоящий из двух видов ценных бумаг. Тогда $V_n = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 - 2\sigma_1 x_1 x_2 \sigma_2 = (\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2)^2$,

и если $x_2 = \frac{x_1\sigma_1}{\sigma_2}$, то $V_n = 0$. Отсюда следует, что при полной обратной корреляции, возможно, такое распределение вложений между видами ценных бумаг, что риск полностью отсутствует.

## 13.2. Оптимизация портфеля ценных бумаг.

При проведении операций купли-продажи ценных бумаг перед инвестором стоит задача об оптимальном варианте их осуществления, либо задача сравнения проводимой операции с оптимальным вариантом. Для этого необходимо решить задачу оптимизации структуры портфеля.

Формулировки задач оптимизации могут быть различны, но выделяют два основных подхода к получению структуры портфеля:

– с максимальной доходностью при заданной инвестором величине риска конечного портфеля;

– с минимальной величиной риска при заданной инвестором доходности конечного портфеля.

Математические постановки задач получат следующий вид:

1. Найти $x_i$ $(i = 1,2,...,n)$ - долю капитала, вложенного в ценные бумаги $i$ - го вида, максимизирующие ожидаемую доходность портфеля при условии, что обеспечивается заданное значение вариации (дисперсии) доходности:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i m_i \to \max; \\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} x_i x_j \le (\sigma_n^0)^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x_i \ge 0 \end{cases} \quad (13.1),$$

2. Найти $x_i$ $(i = 1,2,...,n)$ - долю капитала, вложенного в ценные бумаги $i$ -го вида, минимизирующие вариацию (дисперсию) доходности портфеля при условии, что обеспечивается заданное значение $m_n$ ожидаемой доходности.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} x_i x_j \to \min; \\ \sum_{i=1}^{n} x_i m_i \ge m_n^0; \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x_i \ge 0 \end{cases} \quad (13.2),$$

где $\sigma_n^0$ и $m_n^0$ - заданные значения риска и доходности портфеля.

Задачи (13.1) и (13.2) являются задачами нелинейного программирования и для их решения могут быть применены соответствующие методы решения. Например (13.2), задача квадратичного программирования, которую решаем с помощью функции Лагранжа

$$L(x_1,...,x_n,\lambda_1,\lambda_2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}V_{ij}x_ix_j+\lambda_1\left(-\sum_{i=1}^{n}x_i+1\right)+\lambda_2\left(-\sum_{i=1}^{n}x_im_i+m_n^0\right)$$

Описанный выше подход, позволяющий адекватно учесть в модели две противоречащие друг другу цели - максимизировать ожидаемую доходность и минимизировать риск – был впервые предложен Г. Марковицем.

Другой крупнейший американский экономист Д. Тобин разработал модель для случая, когда на рынке присутствуют безрисковые ценные бумаги( например, государственные ценные бумаги).

Пусть $m_0$ - эффективность безрисковых бумаг, а $x_0$ - доля капитала, вложенного в них; $m_r$ - средняя ожидаемая эффективность и $V_r$, $\sigma_r$ - вариация (дисперсия), среднее квадратичное отклонение эффективности рисковой части портфеля, в которую вложено $(1-x_0)$ часть всего капитала. Тогда ожидаемая эффективность всего портфеля можно описать линейной функцией от риска:

$$m_n=m_0+\frac{\sigma_n(m_r-m_0)}{\sigma_r}$$

Задача об оптимальном портфеле в этом случае представляет собой задачу квадратичного программирования:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}x_ix_j\to\min;\\ x_0m_0+\sum_{i=1}^{n}x_im_i\ge m_n^0;\\ x_0+\sum_{i=1}^{n}x_i=1\\ x_0\ge 0, x_i\ge 0\end{cases}\qquad(13.3)$$

при этом $m_0<m_n$.

## Тема 14. Основные актуарные принципы

### 14.1 Эквивалентность обязательств страховщика и страхователя. Рисковая премия

Актуарий должен решить для данной страховой компании следующие задачи:

– определить величину рисковой премии, обеспечивающей эквивалентность обязательств и риска у страховщика и страхователя;

– определить величину рисковой надбавки;

– определить величину страхового запаса (капитала), обеспечивающего выживание (неразорение) компании с определенной надежностью;

– проанализировать возможность повышения устойчивости компании с помощью перестрахования и рассчитать плату за перестрахование при различных условиях договора о перестраховании;

– оценить положение компании на страховом рынке и в зависимости от ситуации сформулировать подтвержденные расчетами рекомендации по укреплению позиций компании.

По договору страхователь платит взносы, как правило, в течение всего срока действия договора. Если страховой случай не наступил, то он заплатил только за свое спокойствие, так как его взносы ему не возвращаются, а остаются страховщику. В этом состоит риск страхователя.

Риск страховщика в том, что если страховой случай произошел после уплаты клиентом первого взноса, страховщик обязан заплатить оговоренную контрактом сумму, значительно превышающую размер страхового взноса (премии).

Поэтому для определения соответствия между величиной (и условиями) страхового возмещения и величиной страховой премии необходимо приравнять риски страховщика и страхователя с учетом вероятности наступления страхового случая и величины убытков от него (рис. 14.1), т.е. требуется равенство плат за ошибку.

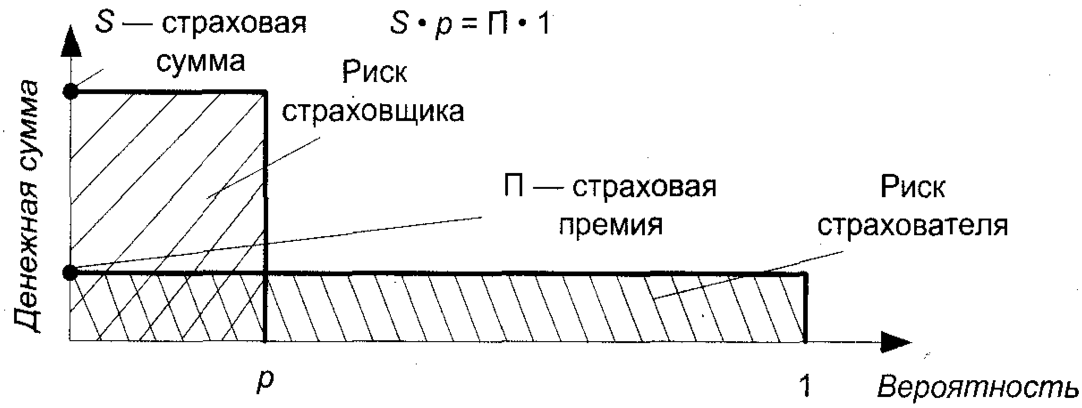


Рис. 14.1. Риск страхователя и риск страховщика

Страховой случай может либо наступить с вероятностью $p$, либо не наступить с вероятностью $q = 1 - p$. Следовательно, страхователь рискует премией $\Pi$ с вероятностью $1 - p$, а страховщик рискует разницей между страховой суммой и полученной премией $(S - \Pi)$ с вероятностью $p$. Поэтому принцип эквивалентности риска сторон приводит к уравнению: $(S - \Pi)p = \Pi(1 - p)$, отсюда: $\Pi = Sp$.

Однако страховщик оперирует не с индивидуальным, а с коллективным риском (общее число случаев для всего портфеля и сумма всех выплат). То есть страховщик стремится установить такое соотношение между страховым взносом и страховым возмещением, при котором практически в любой момент времени суммы взносов, собранных к этому моменту со всех клиентов (данной однородной группы договоров), было бы достаточно для выплаты всех возмещений в этой группе (по случаям, происшедшим к этому моменту времени). Таким образом, принцип эквивалентности обязательств страховщика и страхователя математически выражается в равенстве математических ожиданий двух величин: суммы всех страховых взносов и суммы всех страховых возмещений.

Страховая премия может быть единовременной и периодической. Единовременную рисковую премию страхователь уплачивает страховщику сразу за весь период страхования вперед. Её сумма определяется к моменту заключения договора страхования на основе эквивалентности риска сторон.

При периодической премии, процесс выплат страховых взносов (премий) растянут на весь период действия договора. Поэтому необходимо учесть изменение цены денег во времени. Следовательно, принцип эквивалентности обязательств двух сторон принимает вид: современные цены рисков страховщика и страхователя равны.

Если учитывать кроме математического ожидания ущерба и плотность вероятности наступления страхового случая то, в среднем должно выполняться условие равенства современных цен математических ожиданий двух величин: накопленной суммы взносов и величины возмещения.

Именно из этого условия определяется размер рисковой премии. С учетом рисковой надбавки получается нетто премия. Рисковая премия + Рисковая надбавка = Нетто-премия. Затем на основании этой величины вычисляется брутто премия. Если нагрузка на ведение дела составляет фиксированный процент $f$ от тарифа, брутто-премию можно найти, разделив нетто-премию на $(1-f)$. Далее решаются задачи определения величины собственного капитала и страховых резервов, для снижения вероятности разорения компании, выбора условий перестрахования, наконец, составляется инвестиционный портфель.

Составляющие, обеспечивающие покрытие риска страховщика, показаны на рис. 14.2

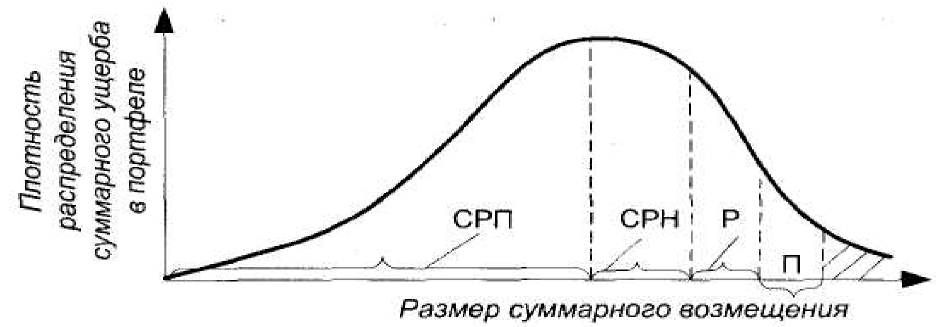


Рис. 14.2. Составляющие, обеспечивающие покрытие риска страховщика где, СРП – суммарная рисковая премия; СРН – суммарная рисовая надбавка; Р – резерв ( начальный капитал); П – перестрахование; Заштрихованная область - необеспеченный риск.

## 14.2 Распределения, встречающиеся в работе страховщика. Степень риска

При решении задач определения рисковой премии, надбавки, резерва и перестрахования актуарий имеет дело с вероятностными характеристиками. Для распределения количества требований выплат $N$, применяются биномиальное распределение, распределение Пуассона и отрицательно-биномиальное распределение.

Если имеется $n$ независимых договоров страхования, вероятность требования которых одинакова для всех договоров и равна $p$, то число требований о выплате - $N$ имеет биномиальное распределение с параметрами $n$ и $p$ (пишем $N \sim B(n,p)$). Случайная величина $N$ принимает значение $r$ с вероятностью

$$\Pr(N=r) = C_n^r p^r (1-p)^{n-r}, \; r = 0,1,2,...n.$$

Если во время коротких временных интервалов $\Delta t$ может быть предъявлено не более одного требования о выплате, вероятность того, что будет предъявлено только одно требование о выплате равна $\lambda\Delta t$, непересекающиеся временные интервалы независимы то число требований $N$ о выплате за период времени $t$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda t$ (пишем $N \sim B(\lambda,t)$). Случайная величина $N$ принимает значение $r$ с вероятностью

$$\Pr(N=r) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^r}{r!} \; r = 0,1,2,...,$$

Можно пользоваться и результатами для более простой формулы:

$$\Pr(N=r) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!} \; r = 0,1,2,...,$$

где $\lambda$ - среднее значение числа требований о выплате за единичный период времени. Распределение Пуассона может использоваться в качестве хорошего приближения биномиального распределения, если $n$ велико, а $p$ мало. Тогда в качестве $\lambda$ нужно взять $np$.

В отрицательном биномиальном распределении значение вероятности случайной величины определяется числом независимых испытаний, при котором происходит фиксированное число неудач. Пусть $k$ и $r$ представляют соответственно число испытаний и фиксированное число неудач. Тогда плотность вероятности отрицательного биномиального распределения описывается выражением

$$\Pr(N=r) = C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r}, k = r, r+1,... \; 0 \le p \le 1, \; q = 1-p, \; r = 0,1,2,...$$

$\Pr(N=k)$ - вероятность того, что при $k$ испытаниях будет иметь место $r$ неудач.

Для распределение размера требований выплат $T$ применяются экспоненциальное и нормальное распределение.

Экспоненциальным называется распределение, описываемое функцией плотности экспоненциального распределения:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \text{ (пишут } T \sim E(\lambda)\text{)},$$

где $T$ - период времени до первого требования о выплате

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины $T$, которое описывается плотностью

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \text{ (пишут } T \sim N(\mu, \sigma^2)\text{)},$$

где $\mu$ - математическое ожидание,

$\sigma$ - среднее квадратическое отклонение.

.

Соответствующая функция распределения имеет вид

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(y-\mu)^2/2\sigma^2} dy,$$

Вероятность попадания случайной величины $T$ в интервал $(\alpha, \beta)$ вычисляется по формуле:

$$\Pr(\alpha < T < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \Phi(\frac{\beta - \mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - \mu}{\sigma}),$$

где $\Phi(z)$ - функция Лапласа ($\Phi(z)$ - нечетная функция). Таблица значений функции $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-y^2/2} dy$ приведена в приложении.

Важнейшими количественными характеристиками случайной величины являются математическое ожидание и дисперсия.

Математическое ожидание выступает как мера для среднего уровня требований о выплате.

Пусть $X$ - дискретная случайная величина, принимающая значения $x_i$ с вероятностью $p_i$. Тогда математическое ожидание $X$ - это величина $M(X) = \sum x_i p_i$, которая определяет размер рисковой премии.

Если $X \sim B(n, p)$, то $M(X) = np$.

Если $X \sim B(\lambda, t)$, то $M(X) = \lambda t$.

Если $T$ - непрерывная случайная величина с функцией плотности $f(t), t > 0,$ то математическое ожидание задается следующим образом

$M(T) = \int_0^{\infty} tf(t)dt$,

Если $T \sim E(\lambda),$ то $M(T) = 1/\lambda$.

Если $T \sim N(\mu, \sigma^2)$, то $M(T) = \mu.$

Дисперсия случайной величины $X$ показывает колебания уровня требований около среднего значения, и определяется по формуле:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Удобная формула для вычисления дисперсии:

$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$.

Если

$X \sim B(n, p)$, то $D(X) = npq, q = 1 - p$;

$X \sim P(\lambda t)$, то $D(X) = \lambda t$;

$X \sim E(\lambda), X \sim E(\lambda)$, то $D(X) = 1/\lambda^2$;

$X \sim N(\alpha, \sigma^2)$, то; $D(X) = \sigma^2$;

Когда желательно, чтобы оценка рассеивания имела размерность случайной величины, вычисляют среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$. На его основе рассчитывается коэффициент вариации, который позволяет оценить степень риска - $K = \dfrac{\sigma(X)}{M(X)}$.

Пусть $p$ - вероятность наступления страхового случая, тогда величина ущерба $X$ распределена по известному закону. Это позволяет рассчитать условные математическое ожидание $M(X/A)$ и дисперсию $D(X/A)$. На их основе рассчитываются соответствующие характеристики $M(X)$ и $D(X)$.

$M(X) = M(X/A) \cdot p$; $D(X) = D(X/A) \cdot p + pq \cdot (M(X/A))^2$,

Это позволяет оценить степень риска:

$$K(X) = \sigma(X) \big/ M(X) = \sqrt{D(X/A)/[p \cdot M(X/A)^2] + q/p} = \sqrt{K^2(X/A)/p + q/p}$$

Из формулы видно, если величина ущерба при наступлении страхового случая фиксирована, т.е. $D(X/A) = 0$, то $K = \sqrt{q/p}$. Эта формула показывает опасность принятия отдельных рисков с очень малой вероятностью $p$. Если ущерб распределен то появляется и второй фактор увеличения опасности для страховщика – большая дисперсия $D(X/A)$.

Рассмотрим для этой ситуации процесс определения рисковой надбавки (абсолютной и относительной). Пусть компания имеет однородный портфель $n$ договоров с одинаковыми страховыми суммами $S$ и вероятностями наступления страховых случаев $p$, $m$ – случайное число страховых случаев в портфеле ($M(m) = np$, $D(m) = npq$). Компанию интересует не только среднее число случаев $np$, но и величина возможного превышения этого значения $d$ и вероятность такого отклонения. Согласно интегральной теоремы Лапласа для биномиального распределения: $P(np - d < m < np + d) = \Phi(t)$, $P(m > np + d) = [1 - \Phi(t)]/2$. Тогда абсолютная рисковая надбавка $d = t \cdot \sqrt{npq}$ и относительная надбавка $\Theta = d/n \cdot p$. (В более общем случае, когда эта теорема неприменима, используется неравенство Чебышева).

14.3. Проблемы определения рисковой надбавки

Использовать рисковую премию без надбавки нельзя, так как при достаточно длительном периоде деятельности страховая компания будет неизбежно разорена даже при очень больших (но конечных) начальных резервах. Смысл надбавки - обеспечить безубыточность, а не компенсировать себестоимость страхования.

Исторически первым методом включения надбавки в тариф стал неявный способ, при котором рисковая премия просто умножалась на некоторый поправочный коэффициент, больший единицы, т.е. надбавка была пропорциональна самой рисковой премии: $P = (1 + d) \cdot M(Z)$.

Неопределенность возникает из-за того, что будущее возмещение может отличаться от своего математического ожидания. Кроме того, математическое ожидание будущих ущербов не обязано совпадать со средним значением ущерба в прошлом.

Недостаток этого метода - отсутствие учета изменения разброса ущерба. Чтобы исправить это, можно вместо указанного поправочного коэффициента включить в тариф добавление, пропорциональное либо среднему квадратическому отклонению $P = M(Z) + b\sqrt{D(Z)}$, либо дисперсии $P = M(Z) + c \cdot D(Z)$.

Иногда возможен вариант, основанный на принципе максимального возможного возмещения риска: $P = p \cdot M(Z) + (1 - p) \cdot \max(Z)$, $p > 0$.

В этой формуле необходимо предполагать конечность $\max(Z)$, в противном случае $P = \infty$, т.е. риск нестрахуем.

На практике часто нагрузку конструируют: $a \cdot M(Z) + b \cdot \sqrt{D(Z)} + c \cdot D(Z)$.

В теоретическом плане весьма интересен подход, основанный на функции полезности.

Функция полезности должна обладать следующими двумя свойствами: она должна быть строго возрастающей, т.е. $U`(X) > 0;$ скорость возрастания должна убывать, т.е. $U``(X) > 0;$. Такими свойствами обладают: $In\,x;\ x^a, 0 < a < 1; 1 - \exp(x)$. Очевидно, что обладающая этими свойствами функция инвариантна относительно линейного преобразования, т.е. $U(X)$ и $V(X) = a \cdot U(X) + b$ эквивалентны, так как одинаково ранжируют суммы.

На практике функцию полезности обычно определяют с помощью экспертных оценок. После определения функции полезности можно сравнить два экономических исхода $X$ и $Y$ с элементами случайности.

Вместо сравнения по критерию ожидаемых убытков можно сравнить их на основе ожидаемой полезности. Например, при начальном капитале $A$ выбирается $\max\{M[U(A + X)],\ M[U(A + Y)]\}$. Это и определяет рациональный выбор соответственно $X$ или $Y$.

В качестве примера рассмотрим экспоненциальную функцию:

$U(x) = \left(-e^{-b \cdot x}\right)$, тогда

$U'(x) = \left(-e^{-b \cdot x}\right)'_x = (-1) \cdot e^{-b \cdot x} \cdot (-b) = be^{-b \cdot x} > 0;$

$U''(x) = (U'(x))'_x = (be^{-b\cdot x})'_x = b\cdot e^{-b\cdot x}\cdot(-b) = -b^2\cdot e^{-b\cdot x} < 0$.

Проанализируем зависимость решения от начального капитала А:

$M[U(A+X)] = M[-e^{-b\cdot(X+A)}] = M[-e^{-b\cdot X - b\cdot A)}] =$

$M(-e^{-b\cdot X}\cdot e^{-b\cdot A}) = -e^{-b\cdot A}\cdot M(-e^{-b\cdot X})$.

Аналогично: $M[U(A+Y)] = -e^{-b\cdot A}\cdot M(-e^{-b\cdot Y})$.

Поэтому сравнение $M[U(A+X)]$ и $M[U(A+Y)]$ сводится к сравнению: $M(-e^{-b\cdot X})$ и $M(-e^{-b\cdot Y})$, т.е. нет зависимости от начального капитала $A$. Это свойство экспоненциального распределения достаточно широко используется в актуарных расчетах при исследовании функции полезности.

В более общем случае исходят из суммы $P$, которую владелец в состоянии заплатить за полную страховую защиту. (Например, агент спрашивает клиента, какую сумму в месяц тот может платить за страхование жизни или другое накопительное страхование, и по величине взноса определяет величину страховой суммы.) После этого можно сравнить два варианта решения клиента: страховаться или нет. Ожидаемые полезности вариантов:

$M$ (полезность страхования) = $M[U(A-P)] = U(A-P)$,

$M$ (бесполезность страхования) = $M[U(A-X)]$,

Сравнивая эти две величины, клиент делает выбор. С учетом возрастания $U(x)$ можно получить максимальный страховой взнос, который потенциальный клиент готов заплатить за договор. Это и есть сумма $G$, при которой $U(A-G) = M[U(A-X)]$.

На практике клиент может согласиться вносить за договор сумму, превышающую свои ожидаемые убытки. Это не противоречит критерию ожидаемой полезности. Если $U(x) > 0$, $U`(x) > 0$, $U``(x) < 0$, то из теории вероятности известно: $M[U(x)] < U[M(x)]$, тогда, $U(A-G) = M[U(A-X)] < U[M(A-X)] = U[A-M(X)]$, т.е. $A-G < A-M(X)$ и $G > M(X)$, т.е. максимальный страховой взнос, на который согласен клиент, больше ожидаемых убытков.

Итак, позиция страхователя прояснилась. Теперь страховщик должен сам определиться со своими интересами и критериями. Его интересует минимальный взнос $H$, при котором он может принять риск $X$. Очевидно, это зависит от начального капитала страховщика $W$. Искомая величина $H$ определяется из соотношения:

$U(W) = M[U(W+H-X)]$.

Убедимся, что $H > M(X)$:

$U(W) = M[U(W+H-X)] < U[M(W+H-X)] =$

$U[M(W) + M(H) - M(X)] = U[W+H-M(X)]$;

$U(W) < U[W+H-M(X)]$;

тогда из монотонности $U(x)$ следует:

$W < W + H - M(X)$, или $H - M(X) > 0$, т.е. $H > M(X)$.

Таким образом страховщик должен получить не меньше, чем некоторая величина $H > M(X)$, а клиент согласен заплатить не больше, чем другая величина $G > M(X)$. Очевидно, они смогут договориться, только если $G > H > M(X)$. Это и есть количественное выражение условия возможности заключить договор: $U(A-G) = M[U(A-X)]$, $U(W) = M[U(W + H - X)]$, $\mathrm{G > H > M(X)}$.

В страховой компании часто возникает ситуация, при которой конкретный клиент в течение длительного времени периодически продлевает свой страховой договор. Компания накапливает информацию о нем за это время. Поэтому к данному клиенту может быть применен либо общий для всех клиентов из некоторой однородной группы подход, либо индивидуальный подход, основанный на специфике клиента. Следовательно, у компании есть два источника информации об этом клиенте.

Проблема состоит в том, как, используя эти два источника, получить сведения, не противоречащие, а дополняющие друг друга, и за счет этого уточнить представления об исследуемом объекте, а следовательно, и цену его индивидуального контракта.

Он достигается с помощью доверительного взноса, который определяется, как взвешенная сумма взносов, рассчитанных по этим двум подходам, а веса определяются с помощью коэффициента доверия (к новым данным) *Z*.

$Z \cdot \overline{X} + (1 - Z) \cdot m,$, $0 < Z < 1$.

Эта формула линейна от соответствующих оценок, коэффициент доверия указывает на оценку страховщиком надежности прямых данных о новом риске, он возрастает с ростом числа наблюдений. С учетом возможности регулярного перерасчета формула обладает всеми требуемыми свойствами.

Возможен и подход, основанный на идеях Байеса.

В начале очередного года страховщик опирается на предыдущий опыт и (планируя свою деятельность на этот год) оперирует априорными распределениями, т.е для нового клиента первоначальный взнос: $\hat{\lambda} = \int \lambda \cdot f(\lambda) \cdot d\lambda$. Это математическое ожидание априорного распределения.

К концу года появилась новая информация. Она позволяет скорректировать представления о процессе. Используем условное (по отношению к полученным данным) распределение риска λ:

$f(\lambda | \text{данные}) = f(\lambda) \cdot f(\text{данные} | \lambda) / f(\text{данные})$.

Здесь $f(\lambda | \text{данные})$ - апостериорное распределение;

$f(\lambda)$ - априорное распределение;

$f(\lambda | \text{данные})$ - функция правдоподобия.

Слева плотность, зависящая от $\lambda$, а справа в знаменателе – величина, не зависящая от $\lambda$, т.е. константа. Тогда величина $f(\lambda | \text{данные})$ пропорциональна числителю. При этом $f(\lambda)$ - прежняя информация, а новые данные (уточнение представлений о процессе) сосредоточены в $f(\lambda / \textit{данные})$, т.е апостериорном распределении.

Этот общий теоретико-вероятностный факт – апостериорная плотность пропорциональна произведению априорной плотности на плотность максимального правдоподобия – достаточно широко используется в актуарных исследованиях и расчетах. Проблема заключается в выборе априорного распределения. Чаще всего пытаются выбирать априорное распределение в некотором достаточно обширном классе распределений, например, гамма-распределение.

## 11.4 Задача о разорении. Влияние перестрахования на вероятность разорения.

В отличие от предыдущих задач, где рассматривалось состояние страхового портфеля в конце срока страхования, в данном разделе анализируется состояние портфеля в произвольный момент времени. Компания должна быть в состоянии выполнить свои обязательства в любой момент, не дожидаясь поступления всех страховых взносов.

Очевидно, что если у компании в начале года не будет капитала, то она окажется несостоятельной:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Активы на момент времени t* | = | *Исходные активы* | + | *Взносы на момент времени t* | - | *Выплаты на момент времени t* |

Итак, принцип определения исходных активов (начального капитала, резерва): на первом этапе, полагая их равными нулю, строим график изменения активов во времени. Эта ломаная линия может опуститься ниже горизонтальной оси (причем неоднократно). На втором этапе находим глобальный минимум. Теперь необходимо поднять ломаную линию настолько, чтобы она вся находилась над горизонтальной осью, т.е. резерв по абсолютной величине должен быть больше найденного глобального минимума (рис.14.1).

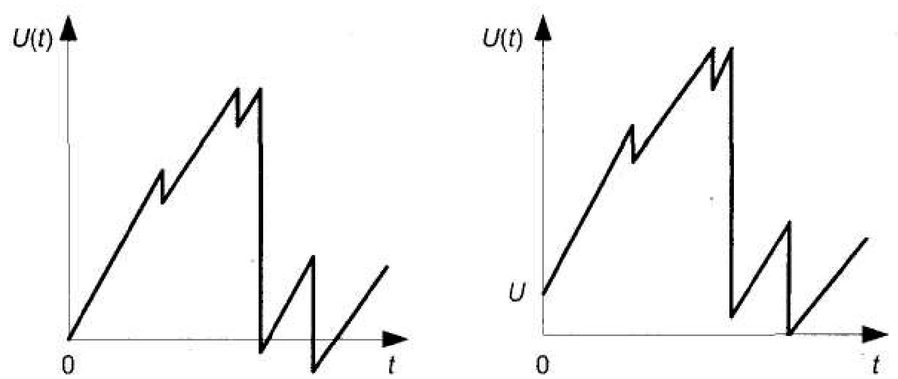


Рис. 14.1. График изменения активов страховой компании во времени

Актуария интересует вероятность разорения и, в частности, зависимость этой вероятности от резерва (начальных активов) и от рисковой надбавки. Очевидно, эта зависимость есть убывающая функция. В простейшем случае предположим, что требования оплачиваются немедленно, процентная ставка равна нулю (цена денег постоянна), издержки страховщика игнорируются.

Пусть для каждого $t > 0$ есть случайная величина $N(t)$ - число требований до момента $t$. Тогда семейство случайных величин $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ - пример случайного процесса.

Пусть $X_i$ - размер $i$-й страховой выплаты; $Z(t)$ - общий размер страховых выплат до момента $t$. Тогда $\{Z(t)\}_{t\geq 0}$ - случайный процесс, описывающий общий размер выплат: $Z(t) = \sum X_i \quad i = 1,..., N(t)$.

Поступающие взносы исследуются на уровне портфеля; при этом предполагается, что взносы поступают непрерывно и с фиксированной скоростью $c$. Активы обозначим $U$, $U(t)$ - активы страховщика в момент времени $t$. Тогда: $U(t) = U + c \cdot t - Z(t)$ представляет собой случайный процесс изменения активов. $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ - случайный процесс, называемый процессом изменения активов.

С актуарных позиций разорение означает падение активов до нуля. Необходимо минимизировать вероятность разорения, а если это не получается, то не допустить выход этой вероятности выше некоторого критического уровня:
$\varphi(U) = \Pr\{U(t)$, при некотором $t$, $0 < t < \infty\}$ - вероятность окончательного разорения при некотором начальном резерве $U$ (т.е. в момент $t$ резерв стал отрицательным).

Чтобы задача была корректной, необходимо предположить, что разорение происходит до некоторого фиксированного момента $t$ (иначе при бесконечном $t$ вероятность разорения равна 1 для любого $U$).

При малом $t$ $\varphi(U,t) = \varphi(U)$. Если на (0, $t$) произошли неблагоприятные для страховщика события (выплаты превысили поступления), то вероятность разорения возросла. На практике контроль активов осуществляется не непрерывно, а в дискретные моменты времени (например, раз в квартал).

При большом $N$ используется подход, основанный на технике построения доверительных интервалов для нормально распределенной *СВ* X. Собранная со всего портфеля нетто-премия (*СНП*) плюс резерв $U$ должны компенсировать превышение размера выплат $X$ над ожидаемой величиной $M$ на $t \cdot СКО$. Здесь $t$ определяется из таблицы функции Лапласа. Если найденная по этим условиям вероятность выживания ниже требований Страхнадзора, то приходится прибегать к перестрахованию.

Предположим, что случайные величины $X_i$ независимы и одинаково распределены; они не зависят от $N(t)$ при любом неотрицательном $t$; случайный процесс $\{N(t)\}$ - пуассоновский с параметром $\lambda$: $\Pr\{N(t) = k\} = e^{-\lambda \cdot t} \cdot (\lambda \cdot t)^k / k!,\ k = 0, 1, 2, 3,...$ .

Случайная величина $S(t)$ при каждом $t$ имеет сложное распределение Пуассона с параметром $\lambda t$. Тогда процесс $\{S(t)\}$ - сложный пуассоновский процесс с параметром $\lambda$. Пусть $P(x)$ - пуассоновская функция распределения, общая для всех $X_i$. Размеры требований положительны, поэтому $P(0)=0$. За единицу времени собранные взносы должны превосходить выплаты: $c > \lambda \cdot M(X_i)$, или: $c = (1+\theta)\cdot\lambda\cdot M(X_i)$.

Если начальные активы не слишком малы, то существует достаточно простая оценка верхней границы вероятности разорения:

$$\varphi(U) < e^{-RU},$$

где $R$ - поправочный коэффициент, зависящий только от функции распределения страховых выплат $P(x)$ и от надбавки $\theta$.

Это неравенство показывает: при возрастании начальных активов $U$ вероятность разорения существенно уменьшается (как и с ростом $R$). Необходимо знать величину $R$. Для этого составляется уравнение:

$$Mx(R) = 1 + (1+\theta)\cdot M(X_i)\cdot R,$$

где в левой части - производящая функция моментов[1] распределения страховых выплат; $\theta$- надбавка безопасности (относительная рисковая надбавка); $M(X_i)$ - среднее распределения страховых выплат; $R$ - единственный положительный корень этого уравнения.

Как правило, уравнение решается численно, но в одном важном частном случае его можно решить точно. Если выплаты распределены экспоненциально:

$$P(x) = 1 - e^{-ax},.\ x > 0$$

Тогда производящая функция моментов: $M(t) = a/(a-t)$, среднее $1/a$, поэтому уравнение примет вид: $a/(a-R) = 1 + (1+\theta)\cdot R/a$. Так как $R>0$, то -$R = a\cdot\theta/(1+\theta) = a - a/(1+\theta)$.

При численном решении этого уравнения полезной является нижняя граница $R$: $1+(1+\theta)\cdot M(X_i)\cdot R = M(R) = \int \exp(R\cdot x)p(x)dx >$

$$> \int\left[1 + R\cdot x + 0{,}5\cdot(R\cdot x)^2\right]\cdot p(x)\cdot dx = 1 + R\cdot M(X_i) + 0{,}5\cdot R^2\cdot M(X_i^2) \text{ т.е.}$$

$1 + R\cdot M(X_i) + \theta\cdot R\cdot M(X_i) > 1 + R\cdot M(X_i) + 0{,}5\cdot R^2\cdot M(X_i^2)$, тогда

$$R < 2\cdot\theta\cdot M(X_i)/M[(X_i)^2].$$

Требование о выплате, предъявляемое страховой компании, должно быть оплачено в полном объеме, но, защищая себя от катастрофических

---

[1] $$M_x(t) = M(e^{tx}) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx, & \text{x - непрерывная величина} \\ \sum\limits_{ч} e^{tx}\,\Pr(x), & \text{x - дискретная величина} \end{cases}$$

для экспоненциального распределения $M_x(t) = \lambda/\lambda - s$

выплат, компания может заключить договор страхования, который называется договором перестрахования. Рассмотрим договоры перестрахования двух типов: договор эксцедентного перестрахования и договор пропорционального перестрахования.

1. При пропорциональном перестраховании страховщик выплачивает оговоренную долю страховой выплаты, независимо от ее размера. Пропорциональное перестрахование можно описать так: если предъявлено требование о выплате $X$, то

$Y = a \cdot X,\ Z = (1-a)X$

Параметр $a$ называется долей удержания, $0 < a < 1$; $X$ - размер требования; $Y$- сумма, выплачиваемая страховщиком; $Z$ - сумма, выплачиваемая перестраховщиком. Распределение выплат страховщика и перестраховщика может быть найдено простой заменой переменной.

2. В ситуации эксцедентного перестрахования компания производит выплаты в полном объеме по всем требованиям, размеры которых не превосходят некоторой суммы $M$, называемой уровнем удержания; если размер требования превышает $M$, разница погашается перестраховщиком. Погашения эксцедентного договора перестрахования можно описать так: если поступает требование размером $X$, то компания платит сумму $Y$, где

$$Y = \begin{cases} X, \text{если X} \le \text{M} \\ \text{M, если X} > \text{M} \end{cases}$$

Перестраховщик платит сумму $Z$, где

$$Y = \begin{cases} 0, \text{если X} \le \text{M} \\ \text{X - M, если X} > \text{M} \end{cases}$$

Очевидно, $X = Y + Z$.

Среднее значение страховой выплаты до заключения эксцендентного перестрахования

$$M(X) = \int_0^\infty xf(x)dx,$$

после заключения эксцедентного перестрахования

$$M(X) = \int_0^M xf(x)dx + M\,\Pr(X > M) = M(X) - \int_0^\infty yf(y+M)dy$$

Величина, на которую уменьшается (в среднем) страховая выплата равна

$$\int_0^\infty yf(y+M)dy$$

Ответственность страховщика ограничена не только (сверху) страховой суммой. Возможно и ограничение снизу, если по договору страхователь принимает участие в возмещении ущерба. Тогда в договоре страхователя и страховщика может присутствовать условие ограничения ответственности страховщика при соответствующем уменьшении взносов страхователя - это франшиза, которая может быть условной или безусловной. Франшиза является еще одним способом участия страхователя в возмещении ущерба.

Между эксцедентным перестрахованием и безусловной франшизой существует тесная связь. Позиция страховщика заключившего договор с безусловной франшизой напоминает позицию перестраховщика, заключившего договор эксцедентного перестрахования.

Рассмотрим влияние эксцедентного перестрахования на вероятность разорения. Совокупный страховой взнос, собранный страховщиком (до перестрахования) за единицу времени, составил $(1+\theta)\cdot\lambda$. Взносы, собранные перестраховщиком за единицу времени (после перестрахования), равны:

$$c' = (1+\theta)\cdot\lambda\cdot M(X_i) - (1+h)\cdot\lambda\cdot M(Z).$$

Для страховщика его нетто-взнос (собранные суммы без перестраховочных платежей) должен превышать ожидаемые страховые выплаты, т.е.

$$(1+\theta)\cdot M(X_i) - (1+h)\cdot M(Z) > M(Y).$$

Ранее показано: $M(Y)+M(Z)=M(Y+Z)=M(X)$, поэтому:

$$\theta\cdot M(X) > h\cdot M(Z).$$

Логично предположить, что $\theta < h$, иначе страховщик «уступает» весь риск перестраховщику, а прибыль оставляет себе.

Если $\theta = h$, то $M(X) > M(Z)$, что справедливо при любом уровне удержания $M$. Стороны делят между собой риск.

Если $\theta < h$, то из условия $M(X) > M(Z)$ возникает ограничение на $M$. Разница между $h$ *и* $\theta$ дает страховщику оценку того, какая часть риска может быть передана перестраховщику. Существует нижний предел $M$.

Проанализируем целесообразность перестрахования если выплаты страховщика распределены экспоненциально со средним, равным 1, Надбавки безопасности страховщика - $\theta$ и перестраховщика - $h$, $(\theta > h)$; уровень удержания равен $M$. Математическое ожидание выплат перестраховщика:

$$M(Z) = \int_M^\infty (x-M)\cdot\exp(-x)dx = \int_0^\infty y\cdot\exp(-y-M)dy = \exp(-M),$$

так как $\theta\cdot M(X) > h\cdot M(Z)$, то $\theta > h\cdot\exp(-M)$, тогда $M > \ln(h/\theta)$.

Например, $\theta$ = 0,15, $h$ = 0,3, тогда $M > \ln(0{,}3/0{,}15) = \ln 2 = 0.693$, т.е. минимальное значение $M$ равно 0,693.

Мы установили предел, показывающий насколько большой может быть часть риска, передаваемая перестраховщику. Но какое значение $M$ должен выбрать страховщик? Поскольку $\theta \le h$, перестрахование уменьшает ожидаемую прибыль страховщика. Перестрахование - это всегда компромисс между ожидаемыми прибылями и безопасностью. Цель перестрахования - повысить безопасность и безопасность достигается с помощью минимизации вероятности разорения, или максимизации поправочного коэффициента.

## Литература

1. Адамадзиев К.Р. Джаватов Д.К., Абдуллаев Г.Ш Экономико-математические методы и модели. Учебное пособие. – Махачкала: Изд. полиграф. центр ДГУ, 2003. – 106с.
2. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учеб. Пособие. - М.: Финансы и статистика, 2005. – 432с.
3. Глухов В.В., Медников М.Д., Коробко С.Б. Математические методы и модели для менеджмента. Учебник для вузов. – СПб.: Изд. «Лань», 2000. – 480с.
4. Гранберг. А.Г. Основы региональной экономики: Учебник для вузов. – М.: ГУ ВШЕ, 2000. – 495с.
5. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. Учебник. – М.: МГУ, изд ДИС, 1997. – 368с.
6. Исследование операций в экономике: Учеб. пособие для вузов / Под ред. Н.Ш. Кремера. − М.: ЮНИТИ, 2005. − 407 с.
7. Колемаев В. А Математическая экономика: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб и доп.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 399с.
8. Корнилов И. А. Основы страховой математики: Учеб. пособие для вузов.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 400с.
9. Кочетыгов А. А. Финансовая математика. Серия «Учебники, учебные пособия». – Ростов н/Д: Издательство «Феникс», 2004. - 480с.
10. Мак Томас. Математика рискового страхования / Пер. с нем. — М.: ЗАО «Олимп -Бизнес», 2005. — 432 с.: ил.
11. Математические методы и модели в экономике: Учеб. пособие. - Минюк С. А., Ровба Е. А., Кузьмич К. К. — Мн.: ТетраСистемс, 2002. - 432 с.
12. Системный анализ. Учеб. Для вузов/А.В.Антонов. – М.: Высшая школа, 2004. – 454 с.
13. Фомин Г. П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности: Учебник. – М.: Финансы и статистика, 2005. -616с.
14. Четыркин Е. М. Финансовая математика: Учебник. – 5 - е изд., испр. – М.: Дело, 2005. – 400 с.
15. Шелобаев С. И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб. пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 367с.

Курбан Раджабович Адамадзиев
Шамиль Магомедович Магомедгаджиев

Математическая экономика

Редактор Адамадзиев И. К.

Подписано в печать 29.11.09 Формат 60×84 1/16
Печать офсетная усл. п.л. 7,25 Уч.-изд.л 7,5
Тираж 150 Заказ № 783

Издательско-полиграфический центр ДГУ
г. Махачкала, ул. Ярагского, 59е.